NAT 5084

HARVARD UNIVERSITY.

LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY.

123

Exchange

October 1, 1897 – September 2, 1901.

123

# Mittheilungen

der

# Naturforschenden Gesellschaft

# in Bern

## aus dem Jahre 1897.

**Nr. 1436-1450.**

Redaktion: J. H. GRAF.

BERN.
Druck und Verlag von K. J. Wyss.
1898.

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

# BIBLIOGRAPHIE

der

# Schweizerischen Landeskunde.

Unter Mitwirkuug

der

hohen Bundesbehörden, eidgen. und kant. Amtsstellen

und zahlreicher Gelehrter

herausgegeben von der

**Centralkommission für schweizerische Landeskunde.**

**In deutscher und französischer Ausgabe.**

*Bis jetzt erschienen :*

**Fascikel Ia:** *Bibliographische Vorarbeiten der landeskundlichen Litteratur und Kataloge der Bibliotheken der Schweiz.* Zusammengestellt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1894. 69 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

**Fascikel I b,** enthaltend: *Bibliographie der Gesellschaftsschriften, Zeitungen und Kalender der Schweiz,* von Prof. J. L. Brandstetter in Luzern. 380 Seiten. Preis Fr. 3.—

**Fascikel II a:** *Landesvermessung und Karten der Schweiz, ihrer Landstriche und Kantone.* Herausgegeben vom eidgen. topographischen Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1892. 193 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

**Fascikel II b:** *Karten kleinerer Gebiete der Schweiz.* Herausgegeben vom eidg. topograph. Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf, Bern 1892. 164 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

**Fascikel II c:** *Stadt- und Ortschaftspläne, Reliefs und Panoramen der Schweiz.* Herausgegeben vom eidg. topograph. Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1893. 173 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

**Fascikel II d,** enthaltend: *Generalregister, Ergänzungen und Nachträge zu den Fascikeln II a—c* (Landesvermessung, Katalege der Kartensammlungen, Karten, Reliefs und Panoramen). Im Auftrage des eidgen. topograph. Büreaus redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. 220 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

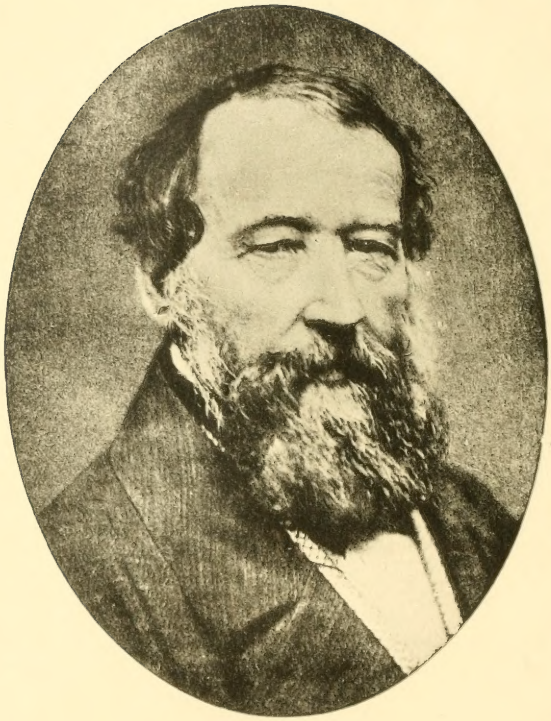
**Fascikel IV b:** *Die Fauna der italienischen Schweiz.* Redigirt von Prof. Dr. A. Lenticchia. Como 1894. 19 Seiten 8°. Preis 50 Cts.

**Fascikel IV 6:** *Fauna helvetica:* Heft 2: Seenfauna. Zusammengestellt von Prof. D. F. Zschokke. Bern 1897. 30 Seiten. 60 Cts.

**Fascikel IV 6:** *Fauna helvetica.* Heft 4: Vögel. Zusammengestellt von Prof. Dr. Theophil Studer. Bern 1895. 57 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

(Fortsetzung auf Seite 3 des Umschlags.)

**Durch jede Buchhandlung zu beziehen.**



Jakob Steiner

(1796—1863)

# Mittheilungen

der

# Naturforschenden Gesellschaft

# in Bern

## aus dem Jahre 1897.

---

**Nr. 1436-1450.**

---

Redaktion: J. H. GRAF.

BERN.

Druck und Verlag von K. J. Wyss.

1898.

# Jahresbericht

über die

## Thätigkeit der bernischen Naturforschenden Gesellschaft

in der Zeit vom 2. Mai 1896 bis 1. Mai 1897.

---

### Hochgeehrte Herren!

In dem verflossenen Vereinsjahre wurden von unserer Gesellschaft 13 Sitzungen abgehalten, wovon 5 im Saale des Hotels Storchen, 3 im zoologischen, 3 im pharmaceutischen und 1 im physiologischen Institut. Eine Sommersitzung fand in Verbindung mit der Naturforschenden Gesellschaft von Solothurn in Kirchberg statt.

An den Vorträgen, welche die Sitzungen grösstenteils ausfüllten, beteiligten sich in verdankenswerter Weise:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Herr | Baltzer | 2 | Vorträge |
| | Brückner | 1 | Vortrag |
| » | Drechsel | 1 | » |
| » | L. Fischer | 1 | » |
| » | E. Fischer | 1 | » |
| » | v. Freudenreich | 1 | » |
| Fräulein | Gascon | 1 | » |
| Herr | J. H. Graf | 3 | Vorträge |
| » | P. Gruner | 1 | Vortrag |
| » | A. Kaufmann | 1 | » |
| » | Kissling | 1 | » |
| » | v. Kostanecki | 1 | » |
| » | Kronecker | 1 | » |
| » | A. Rossel | 1 | » |
| » | Sidler | 1 | » |
| » | Th. Steck | 1 | » |
| » | B. Studer | 1 | » |
| » | Th. Studer | 2 | Vorträge |
| » | Tschirch | 3 | » |
| » | Zeller | 1 | Vortrag |
| » | Ziegler | 1 | » |

Die auswärtige Sitzung fand am 28. Juni gemeinsam mit der Naturforschenden Gesellschaft von Solothurn im Gasthof zur Sonne in Kirchberg statt.

Herr Emil Elsässer in Kirchberg hatte in zuvorkommender Weise die Vorbereitungen zum Empfang der Gäste getroffen. Im festlich dekorierten Saale wurden wir vom Männerchor Kirchberg mit Gesang empfangen. Das Präsidium der folgenden Sitzung übernahm unser verehrter Senior, Herr Professor F. Lang von Solothurn. Es sprachen: Herr Drechsel «Ueber das Jod und seine Bedeutung für den tierischen Organismus.»

Herr Walker, Spitalarzt in Solothurn. «Ueber Louis Pasteur und seine Forschungen.»

Herr A. Rossel. «Ueber die Wirkung der Phosphorsäure als Düngmittel.»

Herr Graf. «Ueber die Ueberschwemmungen der Emme und alte und neue Flusskorrektionen.»

Herr Professor Dr. L. Fischer machte Anregungen zur Erhaltung von Bäumen hohen Alters.

Herr A. Baltzer legte eine Anzahl Photographien aus dem Lammbachgebiet bei Brienz vor.

Ein Bankett, verschönert durch die Vorträge des Gesangvereins von Kirchberg und animiert durch zahlreiche Toaste, vereinigte dann die Mitglieder im grossen Saale zur Sonne, von wo zu Fuss der Heimweg bis Burgdorf angetreten wurde.

Ein für den Monat Mai vorgesehener gemeinschaftlicher Ausflug konnte leider wegen des konsequent schlechten Wetters nicht ausgeführt werden.

Zu dem 50jährigen Amtsjubiläum unseres verehrten Freundes, Prof. Dr. F. Lang in Solothurn, wurde eine Glückwunschadresse der Gesellschaft von unserm Delegierten, Herrn Prof. Dr. Graf, überreicht.

Ueber den Lesezirkel berichtet Herr Dr. Th. Steck:

«Für das abgelaufene Jahr ist ein ziemlicher Rückgang in der Zahl der Teilnehmer am Lesezirkel zu konstatieren. Dieselbe beträgt gegenwärtig nur noch 23. Wegen höchst unregelmässiger Spedition der Mappen wurde ein Mitglied aus der Liste der Teilnehmer gestrichen. Auch unter den übrigen Mitgliedern gibt es leider noch solche, die hinsichtlich der Spedition und Einhaltung der richtigen Reihenfolge der einzelnen Mappen sich grösserer Pünktlichkeit befleissen könnten.

Herr Seminarlehrer F. Marti übernahm in verdankenswerter Weise das durch den Austritt der Herren Dr. Schlachter und Dr. A. v. Steiger verwaist gewordene Amt eines Kontrolleurs.

Die Mitteilungen des deutsch-österreichischen Alpenvereins wurden auf mehrfach geäusserten Wunsch hin nicht mehr beigelegt.»

Der Mitgliederbestand der Gesellschaft hat sich leider wieder um ein Mitglied vermindert, es sind 5 Austritte gegenüber 4 Eintritten zu verzeichnen.

Für das Vereinsjahr 1896/97 wurde zum Präsidenten gewählt, Herr Professor Dr. Drechsel, zum Vicepräsidenten Herr Professor Dr. E. Fischer.

Für das nächste Jahr steht der bernischen Naturforschenden Gesellschaft die Aufgabe bevor, Vorbereitungen zu dem Empfang der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Bern auf das Jahr 1898 zu treffen. Es wird Ehrensache unserer Gesellschaft sein, dahin zu wirken, dass sich dies nun seit dem Bestande der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft zum 5. Male in Bern wiederholende Jahresfest würdig an seine Vorgänger von 1822, 1839, 1858, 1878 anreihe.

Der abtretende Präsident:

Th. Studer.

# Sitzungs-Berichte.

## 909. Sitzung vom 9. Januar 1897.

**Abends 8 Uhr im zoolog. Institut.**

Vorsitzender: Herr Th. Studer. Anwesend: 32 Mitglieder und 2 Gäste.

Herr J. R. Zeller: **Naturwissenschaftliche Streifereien in Aegypten.**

Während eines zweimonatlichen Aufenthaltes in Aegypten im Frühjahr 1896 war der Vortragende hauptsächlich darauf bedacht, einerseits die Fauna und Flora, andrerseits die geologischen Verhältnisse, sowie die Wüste kennen zu lernen. Nach einer kurzen Erörterung der Rolle, welche der Nil in diesem so ganz von der Bewässerung abhängigen Lande spielt, werden die wichtigsten Vertreter der ägyptischen Tierwelt, namentlich der Haustiere erwähnt und ein Blick geworfen auf den Ackerbau, der den Reichtum des Landes darstellt. Einlässlicher wird besprochen die Schichtfolge des Aegyptischen Eocäns, wie sie am Gebel Mo-Kattam bei Kairo so schön aufgeschlossen ist und durch ihren Petrefaktenreichtum schon seit dem Altertum berühmt ist. Durch die Untersuchungen von Meyer-Eymar hat sich die völlige Kongruenz der gleichzeitigen Ablagerungen des Pariserbeckens und Aegyptens erwiesen. Eine Frage, welche noch nicht abgeschlossen ist, betrifft die Entstehung der verkieselten Hölzer, welche sich sowohl in der Umgebung von Kairo (versteinerter Wald), als auch Hunderte von Kilometern weit in der libyschen Wüste vorfinden. Gerade die grosse räumliche Verbreitung dieser meist der Nicolia aegyptiaca angehörigen Pflanzenreste widerstrebt der Theorie Schweinfurths, welcher sie durch Geysire verkieselt sein lassen will.

Eine Expedition in das 100 km. nordwestlich von Kairo gelegene Thal der Natronseen (Wadi Natron) gab dem Reisenden Gelegenheit, sowohl die Wüste an und für sich, als auch ihre Pflanzen- und Tierwelt zu studieren. Die Wüste, teils als Sand, teils als Kieswüste entwickelt, zeigte aufs schönste die Wirkungen der Insolation und Deflation, andrerseits erhielt der Vortragende den bestimmten Eindruck, dass die Theorien Walters über die Entstehung der Wadi durch Windwirkung der Wirklichkeit kaum entsprechen können, indem diese Trockenthäler die typische Gestalt von Erosionsthälern darbieten und die Wirkung der in der Wüste wehenden Winde nicht überschätzt werden darf. Gelang es doch nicht einmal an hiezu scheinbar günstigen Stellen richtige Kantengeschiebe aufzufinden. — Aeusserst interessant waren die Natronseen, welche dem ca. 160 km. langen, 10 km. breiten, äusserst flachen Natronthal den Namen gaben. Die 10 Becken liegen in einer Reihe, sie enthalten eine rote konzentrierte Lauge von Kochsalz und Natron, in welcher in Unmasse ein kleiner Phyllopode (Artemia salina) vorkommt. Die Seen stehen im direkten Abhängigkeitsverhältnis zum Nil: sie trocknen zum

grössten Teil im Sommer aus, sobald der Nil steigt, brechen aus der dem Nilthal zugekehrten Thalseite zahlreiche Quellen, welche zur neuen Bildung der Seebecken führen. Auf welche Weise das Natron dabei entsteht, ist noch nicht sicher festgestellt. Nach der Theorie Sickenbergers passiert das Wasser Schichten mit kohlensaurem Kalk, Gips und Kochsalz, beladet sich dadurch mit schwefelsaurem Natron, das auf dem Wege der Quellen zu den Seen durch Algen und Mikrokosmenvegetation zu Schwefelnatrium reduziert und dann in das Karbonat verwandelt wird. Die ägyptische Regierung trifft gegenwärtig Anstalten, das Natron im Grossen auszubeuten, sie benutzt dabei nicht das Seewasser selbst, aus welchem das Natron schwer zu isolieren wäre, sondern den sog. »Korschef«. Dies ist eine die Seen umgebende Zone trockenen Sandbodens, welcher nur Natron enthält, das stellenweise sogar ausblüht, während das Kochsalz in der Tiefe bleibt. Dieser Korschef wird in Süsswasser geworfen, wo der Sand sich niederschlägt und das Natron in Lösung geht. Süsswasser findet sich in dem so sterilen Wadi Natron in Menge oft wenig tief im Boden, man braucht nur eine Menge Brunnen zu graben, um die Wüste in einen Garten zu verwandeln. Die Vegetation des Thales beschränkt sich auf die die Seen einfassenden Röhrichte von Burdi (Typha latifolia), welche einer mannigfaltigen Sumpfvögelfauna zum Aufenthalte dienen. Ueber die geologischen Verhältnisse ist man nicht ins Klare gekommen. Gips, salzhaltige Thone und verkieselte Kalke sind alles, Fossilien wurden ausser versteinertem Holz keine gefunden. Jedenfalls sind die Ablagerungen sehr jungen Alters. Der Rückweg auf Kamelen nach Kairo führte an den interessanten, mitten in der Wüste gelegenen festungsartigen Klöstern vorbei, in denen koptische Mönche ein beschauliches Dasein führen.

## 910. Sitzung vom 23. Januar 1897.

**Abends 8 Uhr im physiol. Institut.**

Vorsitzender: Herr Th. Studer. Anwesend: 17 Mitglieder und 2 Gäste.

Herr H. Kronecker: **Atembewegungen** (mit Experimenten).

## 911. Sitzung am 13. Februar 1897.

**Abends 8 Uhr im pharmac. Institut.**

Vorsitzender: Herr J. H. Graf. Anwesend: 21 Mitglieder und 1 Gast.

1. Hr. **Tschirch** besprach in Ergänzung seines früheren Vortrages an der Hand von einigen hundert ausgestellten Präparaten, die derselbe den chemischen Fabriken *Siegfried*-Zofingen, Gebr. *Schnorff*-Uetikon, *Geigy*-Basel, *Société chimique des usines de Rhône*-Genève verdankte, die **Entwicklung der chemischen Industrie der Schweiz.** Der Vortragende behandelte zunächst die chemische Grossindustrie, dann die Herstellung von neuen Arzneimitteln und feineren chemischen Präparaten und endlich die Farbenindustrie. Aus den Ausführungen ging hervor, dass die schweizerische chemische Industrie schon jetzt sehr beachtenswerte Resultate erzielt hat.

2. Hr. **Tschirch** besprach ferner ein neues **Konservierungsverfahren für Hymenomyceten.** Der Vortragende hat es sich zur Aufgabe gemacht,

ein Verfahren zu ermitteln, mit Hilfe dessen es gelingt, die Fruchtträger der höheren Pilze in ihrer Form und möglichst auch in ihrer Farbe dauernd zu erhalten. Das Verfahren gab bei der vorwiegenden Mehrzahl der Pilze ein gutes Resultat, nicht bei den rotgefärbten Arten. Es besteht darin, dass die Fruchtträger zunächst in verdünnten Alkohol gelegt werden, dem etwas Schwefelsäure zugesetzt wurde. Hierin bleiben sie je nach der Art zwei Stunden bis 2 Tage liegen. Dann werden sie auf Fliesspapier abgetrocknet und direkt in Vaselinöl eingetragen, dem 0,5 % Phenol zugesetzt worden war. Der Vortragende legte 80 Präparate von Hymenomyceten vor, die in der angegebenen Weise konserviert wurden. Einige lagen bereits 1½ Jahre in Vaselinöl, die Mehrzahl seit dem Sommer 1896. Alle waren in der Form unverändert, die meisten auch in der Farbe. Das Vaselinöl war nirgends gefärbt oder trübe geworden.

3. Hr. **Tschirch** legt die neueste Lieferung (Taf. 50—60) der **Pflanzenphysiologischen Wandtafeln** für den Unterricht vor, die derselbe in Gemeinschaft mit Prof. Frank herausgibt.

4. Hr. **Tschirch** legte vor und besprach den **Anatomischen Atlas der Pharmakognosie und Nahrungsmittelkunde**, die derselbe gemeinsam mit Dr. Oesterle herausgibt. Der Vortragende erläuterte an die 60 seither erschienenen Tafeln, Plan und Grundsätze des Werkes, welches sich, abgesehen von anderem, zur Aufgabe gemacht hat, der Entwicklungsgeschichte auch in der Pharmakognosie Geltung zu verschaffen.

5. Herr B. Studer: **Bericht über die Pilzsaison 1896.**

Der Vortragende konstatiert, dass Sommer und Herbst 1896 infolge der sehr wechselnden warmen und feuchten Witterung einen ungewöhnlichen Reichtum an Hymenomyceten zur Entwicklung gebracht. Als eine für Bern neue Species wird Limocium pudorinum Fr. erwähnt, das letzten Herbst in grossen Mengen aufgetreten ist und vorher nie gefunden wurde. Boletus fusipes Henfler ist im Jahre 1890 in der Umgegend von Bern zuerst bemerkt worden, in den 2 letzten Jahren scheint er wieder verschwunden zu sein. Boletus scaber Bull var. alba ist früher häufig vorgekommen, scheint gleichzeitig mit Boletus fusipes das Gebiet verlassen zu haben.

## 912. Sitzung vom 20. Februar 1897.

**Abends 8 Uhr im zoolog. Institut.**

Vorsitzender: Herr Th. Studer. Anwesend: 19 Mitglieder und 1 Gast.

1. Herr Th. Studer: **Diluviale Knochen vom Salève; Steinbockgehörn aus den Pfahlbauten.**
2. Herr J. H. Graf: Bericht über die **Exhumierung Steiners.**

## 913. Sitzung vom 6. März 1897.

**Abends 8 Uhr im Storchen.**

Vorsitzender: Herr Th. Studer. Anwesend: 19 Mitglieder und 3 Gäste.

Herr P. Gumer: **Neuere Anschauungen über Materie und Energie.**

## 914. Sitzung vom 20. März 1897.

**Abends 8 Uhr im pharmac. Institut.**

Vorsitzender: Herr Th. Studer. Anwesend: 26 Mitglieder und 1 Gast.

1. Herr F. Schönenberger: **Die Baumriesen der Schweiz.**

Nach einigen einleitenden Bemerkungen über den ästhetischen und den Nutzwert der Baumvegetation im allgemeinen, wird festgestellt, dass die in Bezug auf Grösse und Schönheit hervorragenden Baumgestalten sich stark vermindern, namentlich seit dem Bau der Eisenbahnen und wegen dem steten Steigen der Holzpreise.

Es ist bisher nicht viel geschehen, um dem Ausrotten dieser Naturdenkmäler in wirksamer Weise entgegen zu treten. Um den Sinn für Baumschönheit in weitere Kreise zu tragen, lässt das eidgenössische Departement des Innern eine Sammlung von Baumphotographien anlegen und durch die Vermittlung des Buchhandels erscheint ein Baumalbum, das im ganzen 25 grosse Lichtdruckbilder umfassen soll, wovon die beiden ersten Lieferungen aufgelegt sind. Zur Demonstration dienen im übrigen eine Anzahl durch den Vortragenden aufgenommene Photographien.

Eine der sehenswertesten unserer Nadelhölzer ist die Fichte von Stiegelschwand hinter Adelboden, deren unterste Aeste schlangenartig ineinander verschlungen sind. Weisstannen von riesigen Dimensionen gibt es eine grosse Zahl. Oefters ist der Hauptgipfel durch eine Anzahl Seitengipfel ersetzt. Sehr schöne Exemplare solcher Kandelabertannen findet man in St. Cergues und bei Orvin auf hochgelegenen Weiden. Bei Blitzingen im Wallis steht die grösste Lärche der Schweiz, deren Alter auf 500 Jahre geschätzt wird. Noch älter ist wahrscheinlich die grosse Eibe auf dem Gerstler, unweit Burgdorf, eine botanische Merkwürdigkeit ersten Ranges.

Die grösste Eiche ist die sog. Bettlereiche, welche zwischen Scherzligen und Gwatt hart an der Landstrasse steht. Die zahme Kastanie ist durch Aufnahmen vertreten, welche zur Blütezeit im Tessin gemacht wurden. Sehr schön ist die Ulme, welche in Bissone am Luganersee steht.

Sodann wird von den geschichtlichen Bäumen gesprochen, unter denen besonders berühmt sind, der Ahorn von Truns, unter welchem 1424 der graue Bund beschworen worden, die Linde von Rilly bei Lausanne, auf welcher 1519 ein Plakat angeschlagen worden, zur Verkündigung der Reformation; die Linden von Münchenwyler, Freiburg und Yvonand, welche angeblich zur Erinnerung an die Schlacht bei Murten gepflanzt worden sein sollen, während man diejenige von Bonvillars mit der Schlacht von Grandson in Verbindung bringt.

Zum Schluss geschieht der in die Schweiz eingeführten exotischen Holzarten Erwähnung. Von hervorragender Schönheit ist die Libanon-Ceder in der Campagne Beaulieu bei Genf, herrührend von Samen, welcher 1735 vom Naturforscher Jussieu vom Libanon gebracht worden ist. In der Villa Roccabella bei Locarno steht die grösste und schönste Araucaria imbricata, welche wir in der Schweiz besitzen, ebenso ein grosser Eukalyptus globulus.

2. Herr E. Kissling: **Funde von Arctomysresten in der Umgegend von Bern.**

3. Herr E. v. Freudenreich: **Die Erreger der Käsereifung.**

Wie Ihnen bekannt, hat die Bakteriologie nicht bloss auf dem Gebiete der Infektionskrankheiten namhafte Errungenschaften zu verzeichnen, sondern auch für die Gärungsindustrien ist sie von grosser Bedeutung gewesen. Ich erinnere Sie bloss an die Fortschritte, welche die Wein- und Bierindustrie durch Anwendung der *Pasteur*'schen Methoden gemacht haben.

Auch auf dem Gebiete der Milchindustrie haben die Bakteriologen seit einigen Jahren eine rege Thätigkeit entfaltet und man hat ihnen bereits einige nennenswerte Fortschritte zu verdanken, so z. B. die Einführung von Reinkulturen bei der Rahmsäuerung zum Zwecke der Butterfabrikation, wodurch eine viel konstantere und gleichmässigere Qualität der Produkte erzielt wird. Dieses Verfahren wird seit ein paar Jahren in Dänemark und Norddeutschland mit viel Erfolg durchgeführt. Für uns in der Schweiz dagegen, wo meist Süssrahmbutter hergestellt wird, hat es noch nicht die gleiche Bedeutung erlangt.

Für unsere Milchindustrie ist wohl der Käse die Hauptsache, und meine bakteriologischen Studien haben daher bis jetzt hauptsächlich den letzteren im Auge gehabt. In dieser Beziehung haben die bakteriologischen Untersuchungen über manche Punkte Aufklärung gegeben, so z. B. über die Ursachen der Blähung, des Bitterwerdens der Käse u. s w. Der Hauptvorgang jedoch bei der ganzen Käsefabrikation, die sog. **Reifung** des Käses ist noch in Dunkelheit gehüllt. Man weiss zwar, dass diese eigentümliche Gärung der Thätigkeit der Bakterien ihre Entstehung verdankt, denn wenn man die Milch vor dem Verkäsen **pasteurisiert**, d. h. die meisten Bakterien derselben abtötet, oder durch Zusatz antiseptischer Mittel das Wachstum der Bakterien im Käse verhindert, so reift der Käse nicht. Jedoch ist es noch nicht gelungen, der Erreger der Reifung des Käses habhaft zu werden. Die Sache scheint doch nicht schwer zu sein, denn wenn diese Käsebakterien im Casein einen guten Nährboden finden, so ist zu erwarten, dass sie auf unseren künstlichen Nährböden sich leicht züchten lassen werden. Von allen bis jetzt am Käse isolierten Bakterien hat man jedoch noch nicht mit Sicherheit nachgewiesen, dass die Reifung ihr Werk sei. Abgesehen von den vielen zufällig im Käse angetroffenen Mikroben, konstatiert man nur bei Anwendung der verschiedensten Methoden zur Züchtung aërober oder anaërober Bakterien, dass hauptsächlich zwei Gruppen in demselben vertreten sind: besonders viel Milchsäurefermente (d. h. Bakterien, welche den Milchzucker in Milchsäure und Kohlensäure spalten und in jeder Milch zu finden sind) und auch einige sog. peptonisierende Bakterien, welchen *Duclaux* den Namen **Tyrothrix**-Bacillen gegeben hat. Es sind dieses Bacillen, die wohl der gleichen Familie angehören, wie die weitverbreiteten Heubacillen, welche die Gelatine verflüssigen und in der Milch weitgehende Veränderungen hervorbringen, die bis zur Bildung von Leucin, Tyrosin und Ammoniak gehen können. Es war daher natürlich diesen letzteren Bakterien die Hauptrolle bei der Reifung zuzuschreiben. Jedoch ist mir wie auch anderen bei solchen Untersuchungen ihre geringe Zahl gegenüber den Milchsäurebakterien aufgefallen. Während man in einem Gramm reifenden Käses Millionen der letzteren zählt, findet man die ersteren nur vereinzelt auf den Kulturplatten, einige Hundert per Gramm oder oft auch gar keine. Ja, ich habe feststellen

können, dass sie in kolossaler Menge einer frischen Käsemasse zugesetzt, sehr rasch in derselben absterben; so z. B. enthielt ein Versuchskäse, der mit solchen Bakterien geimpft worden war, 700,000 derselben per Gramm nach der Herstellung, 200,000 nach 5 Tagen, 30,000 nach 15 Tagen und 24.230 nach 4 Wochen, offenbar nur die Abkömmlinge der am Leben gebliebenen Sporen. Wie sollten nun diese Bacillenarten die Reifung bedingen, wenn sie sich im Käse gar nicht vermehren, ja rasch in demselben absterben. Ferner konnte ich durch zahlreiche Versuche feststellen, dass der Zusatz solcher Kulturen zu frischen Käsen die Reifung gar nicht zu befördern schien. Dagegen kam ich in anderen, seit Jahren fortgesetzten Versuchen stets zu dem Resultate, dass der Zusatz von Milchsäurefermenten zu pasteurisierter Milch die Reifung der aus letzterer hergestellten Käse begünstigte, während die Kontrollkäse schlecht oder gar nicht reiften. Ich habe daher schon öfters die Vermutung ausgesprochen, dass unter den Milchsäurefermenten die Erreger der Käsereifung zu suchen seien, jedoch war ich mir wohl bewusst, dass dieser Annahme gewisse Bedenken entgegentreten mussten. Bis jetzt nämlich weiss man von den Milchsäurefermenten nur, dass sie Milchsäure bilden, und von weiteren durch sie bewirkten Zersetzungen des Caseïns weiss man nichts. Bringt man z. B. solche Milchsäurefermente in sterilisierte Milch hinein, so gerinnt die Milch infolge der Säurebildung und erleidet keine weiteren Zersetzungen. Die gebildete Säure wirkt eben antiseptisch und verhindert ein weiteres Wachstum der Bakterien. Ich versuchte nun durch einen Kreidezusatz und öfteres Durchschütteln der Kulturflaschen zunächst die Säure zu neutralisieren und überliess die mit verschiedenen aus Käse isolierten Milchsäurefermenten geimpfte Milch 2—3 Monate sich selber. Nach dieser Zeit wurde die Milch untersucht. Da es sich hier nur um Vorversuche handelte, nahm ich Abstand von einer vollständigen, weitführenden chemischen Analyse und bediente mich eines einfacheren Verfahrens. Bekanntlich befindet sich in der Milch nur ein geringer Teil der Eiweissstoffe in Lösung, der grösste Teil ist bloss suspendiert und wenn man Milch z. B. durch ein *Chamberland*'sches Filter filtriert, so findet man im Filtrate nur etwa den zehnten Teil der gesamten Eiweissstoffe wieder, weil nur der in Lösung befindliche Teil das Filter passiert. Einer der Hauptvorgänge bei der Käsereifung nun ist, dass das Caseïn in lösliche Eiweisssubstanz übergeführt wird, und wenn man ein wässeriges Käseextract herstellt und durch die *Chamberland*'sche Kerze filtriert, so findet man in dem Filtrate diese gelösten Eiweissstoffe wieder. Darauf beruht die von *Duclaux* bei seinen Käseanalysen befolgte Methode, indem er zur Feststellung des Reifungsgrades des Käses das Verhältnis zwischen dem Gesamteiweissstoffe und dem filtrierbar gewordenen Teile desselben bestimmt. Wenn auch das Löslichwerden des Caseïns bei dem Reifungsprozess nicht alles ist, sondern von weiteren Zersetzungen begleitet wird, so bildet es jedenfalls den Anfang und einen Hauptteil des ganzen Prozesses, wie auch spätere Untersuchungen (insbesondere *Bondzynski*, Landw. Jahrbuch der Schweiz, VIII, p. 1894) zeigten.

Statt nun wie *Duclaux* bei seinen Käseanalysen in einer bestimmten Portion das gesamte Eiweiss und den in einer gleichen Portion filtrierbar gewordenen Teil derselben zu bestimmen, was mehrere Trockenrückstand-asche- und Milchzuckerbestimmungen nötig macht, begnügte ich mich, in

dem Filtrat der mit diesen Bakterien geimpften Milch den Stickstoff zu bestimmen (nach *Kjeldahl*). War mehr Stickstoff in einem solchen Filtrat enthalten als im Filtrat einer gleichen bakterienfreien Milch, so musste angenommen werden, dass ein Teil des Caseïns durch die Einwirkung der eingeimpften Bakterien eben löslich gemacht worden sei. Selbstverständlich wurde jedesmal die Reinheit der Kulturen festgestellt. Die Stickstoffbestimmungen konnte ich im Laboratorium des Herrn Dr. Schaffer, mit Hülfe seines Assistenten Herrn Schütz, ausführen. Beiden Herren möchte ich hier meinen besten Dank dafür aussprechen.

Zwei Kolben waren mit einem ovalen Kokkus, der oft als kurze Stäbchen erscheint und wohl mit *Leichmanns* Bacillus der spontanen Milchsäuerung identisch ist, geimpft.

Ein anderer Kolben war mit einem aus Käse isolierten Milchsäureferment in Stäbchenform geimpft.

Zwei fernere Kolben endlich impfte ich mit je 2 anderen Käse-Milchsäurefermenten, die wahrscheinlich identisch sind mit den von mir in früheren Arbeiten Bacillus $\alpha$ und $\delta$ genannten Mikroorganismen.

Ich werde diese 3 Kulturen A, B und C nennen.

Bei zwei Proben Magermilch gleicher Herkunft fand ich im Filtrat 0,034 und 0,031 % Stickstoff, was einem Gehalt von 0,227 und 0,209 % Caseïn (durch Multiplikation mit dem Caseïnfaktor 6,557) entsprechen würde.

Das Filtrat der Kulturen C dagegen enthielt im ersten Kolben 0,179 % Stickstoff (gleich 1,178 % Caseïn) und im zweiten Kolben 0,152 % Stickstoff (gleich 0,996 Caseïn), also im Mittel 5,1 mal mehr Stickstoff, resp. lösliche Eiweisssubstanz.

Im Filtrat der Kultur B fand ich 0,191 % Stickstoff (gleich 1,225 % Caseïn), d. h. ca. 6,4 mal mehr als in der Kontrollmilch.

Mit der Kultur A waren die Resultate etwas weniger günstig, 0,044 % Stickstoff (gleich 0,989 Caseïn) im ersten Kolben und 0,111 % Stickstoff (gleich 0,73 Caseïn) im zweiten Kolben, oder im Mittel 2,4 mal mehr als in der Kontrollmilch.

Die Milch bläut stets ganz leicht das rote Lacmuspapier. Die Farbe des Filtrates war in den Kulturen B und C bräunlich, in der Kultur A dagegen hellgelb, wie das Filtrat der Kontrollmilch. Geruch und Geschmack der geimpften Milchproben waren ganz eigentümlich und sehr verschieden von dem der Kontrollmilch.

Wie sind nun diese Versuche zu deuten? Sicher ist dadurch festgestellt, dass in diesen Kulturen, besonders in den Kulturen B und C ein Teil des Caseïns in lösliche Eiweisssubstanz übergeführt worden ist. Sollte dieses etwa bloss der Einwirkung der gebildeten Milchsäure zuzuschreiben sein? Um diese Frage zu entscheiden, versetzte ich Milch mit 0,5—1 und 2 % Milchsäure und untersuchte letztere Probe, nachdem sie einige Zeit bei 37° verblieben war, indem ich den Stickstoffgehalt des Filtrates bestimmte. Derselbe betrug 0,034 %, derjenige der filtrierten Kontrollmilch 0,031. Wie man sieht, liegen hier die Differenzen innerhalb der zulässigen Fehlergrenzen. Die beiden anderen Milchproben werde ich nach längerer Zeit analysieren, ich glaube aber schon jetzt annehmen zu dürfen, dass die in meinen Versuchen konstatierte Lösung des Caseïns nicht etwa auf die bloße Einwirkung der gebildeten Milchsäure zurückzuführen ist. Daraus ergibt sich also, dass Milchsäure-

fermente in der That fähig sind, das Caseïn in lösliche Eiweisssubstanz überzuführen und dieses muss, mit Rücksicht auf ihre so starke Vermehrung im Käse, zu der Annahme führen, dass dieselben bei dem Reifungsprozesse des Käses sich hauptsächlich beteiligen, da dieser Prozess zum grossen Teil in dem Löslichwerden der Eiweisssubstanz besteht. Meine früher ausgesprochene Vermutung, dass sie bei der Reifung des Emmenthalerkäses eine grosse, ja vielleicht die alleinige Rolle spielen, gewinnt dadurch an Wahrscheinlichkeit.

Ich bin mir freilich bewusst, dass die dargelegten Versuche nur als Vorversuche gelten können, und es sind daher bereits weitere Versuche im Gange, die darüber volle Klarheit schaffen werden. Sollten dieselben die bisherigen Resultate bestätigen und erweitern, so brauche ich kaum auf die wichtigen Folgen hinzuweisen, die sich daraus für die Praxis ziehen lassen. Denn Hauptbedingung, um die Reifung des Käses etwa durch Zusatz von Bakterien zu begünstigen, ist, dass wir die Bakterien kennen, welche die Reifung bewirken.

## 915. Sitzung vom 1. Mai 1897.

**Abends 8 Uhr im pharmac. Institut.**

Vorsitzender: Herr Th. Studer. Anwesend: 18 Mitglieder.

1. Eingelangt ist ein Schreiben, in welchem der S. A. C. (Sektion Bern) die naturforschende Gesellschaft ersucht, 2 Delegierte zu bezeichnen, zur Besprechung der Frage, wie die verschiedenen wissenschaftlichen Vereine der Stadt Bern ein eigenes Heim sich schaffen könnten. — Die Bezeichnung der Delegierten ist dem Vorstande überlassen.
2. Wahlen: Zum Präsidenten für das Vereinsjahr 1897/98 wird gewählt Herr Prof. Dr. Edm. Drechsel, zum Vicepräsidenten: Herr Prof. Dr. Ed. Fischer.
3. Herr A. Tschirch: **Drei botanische Gärten in den Tropen.**

## 916. Sitzung vom 12. Juni 1897.

**Abends 8 Uhr im Storchen.**

Vorsitzender: Herr Edm. Drechsel. Anwesend: 16 Mitglieder.

1. Herr Th. Studer verliest den Jahresbericht pro 1896/97.
2. Das Centralkomitee der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft wünscht, dass offiziell angezeigt werden möchte, ob die naturforschende Gesellschaft von Bern das Jahresfest pro 1898 übernehmen wolle. Die Anmeldung wird einstimmig beschlossen.
3. Die Jahresrechnung für das verflossene Jahr wird genehmigt.
4. Herr Edm. Drechsel: **Die Aufgaben der physiologischen Chemie.**

## 917. Sitzung vom 4. Juli 1897.

**in Aarwangen.**

Gemeinsam mit der naturforschenden Gesellschaft von Solothurn.

1. Herr Dr. Köpsel: **Das Elektrizitätswerk in Wynau.**
2. Nachmittags Besichtigung der Anlagen in Wynau.

## 918. Sitzung vom 6. November 1897.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr Ed. Fischer. Anwesend: 21 Mitglieder und 1 Gast.

1. Herr A. Tschirch hält eine Gedächtnisrede auf den verstorbenen Präsidenten unserer Gesellschaft, Herrn Dr. Ed. Drechsel.
2. Herr Ed. Brückner: Gute und schlechte Weinjahre in ihren Beziehungen zu den Klimaschwankungen.

## 919. Sitzung vom 20. November 1897.

Abends 8 Uhr im geolog. Institut.

Vorsitzender: Herr Ed. Fischer. Anwesend: 28 Mitglieder und 7 Gäste.

1. Herr A. Baltzer: Fossile Mammuthleichen aus dem Eise Neu-Sibiriens.
   Lieferung XXX der Beiträge zur geolog. Karte der Schweiz.
   Ein neues Barytvorkommen aus dem Oberland.
2. Herr Ed. Brückner: Die Verbreitung des Eisbodens in Sibirien.

## 920. Sitzung vom 4. Dezember 1897.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr Ed. Fischer. Anwesend: 15 Mitglieder.

Herr O. Hug: Der Isteinerklotz bei Basel.

## 921. Sitzung vom 19. Dezember 1897.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr Ed. Fischer. Anwesend: 18 Mitglieder.

1. Herr E. Kissling: Der Quellenerguss der städtischen Wasserversorgung in den letzten 30 Jahren.
2. Herr Kaufmann: Demonstration von Spinnennestern aus Corsika und Lärchennadelballen aus dem Silser See.
3. Herr J. H. Graf weist Reproduktionen alter Karten vor.
4. Herr Th. Studer: Die Fortpflanzungsgeschichte der Aale.

# Verzeichnis der Mitglieder

der

## Bernischen Naturforschenden Gesellschaft.

(Am 31. Dezember 1897.)

Die mit * bezeichneten Mitglieder wurden im Jahre 1897 neu aufgenommen.

### Vorstand.

Prof. Dr. *Ed. Fischer,* Vice-Präsident bis 1. Mai 1898.
*B. Studer,* jun., Apotheker, Kassier seit 1875.
Dr. *E. Kissling,* Sekretär seit 1892, Unterbibliothekar seit 1888.
Prof. Dr. *J. H. Graf,* Redaktor der Mitteilungen seit 1883.
*Dr. Th. Steck,* Oberbibliothekar und Geschäftsführer des Lesezirkels.

### Mitglieder.

| | | Eintritt. |
|---|---|---|
| 1. | *Anderegg,* Ernst, Dr. phil. und Gymnasiallehrer, Bern | 1891 |
| 2. | *Andreae,* Philipp, Apotheker, Bern | 1883 |
| 3. | *Badertscher,* Dr. A., Sekundarlehrer, Bern | 1888 |
| 4. | *Balmer,* Dr. Hans, Bern | 1886 |
| 5. | *Baltzer,* Dr. A., Professor der Mineralogie und Geologie, Bern | 1884 |
| 6. | *Baumberger,* Ernst, Sekundarlehrer in Basel | 1890 |
| 7. | *Beck,* Dr. Gottl., Lehrer des Freien Gymnasiums, Bern | 1876 |
| 8. | *v. Benoît,* Dr. jur. G., Bern | 1872 |
| 9. | *Benteli,* A., Rektor und Docent, Bern | 1869 |
| 10. | *Benteli,* A., V. D. M., Bern | 1891 |
| 11. | *Berdez,* H., Professor an der Tierarzneischule, Bern | 1879 |
| 12. | *Brückner,* Dr. Ed., Prof. der Geographie, Bern | 1888 |
| 13. | *Brunner,* C., Dr. phil., Trautsohngasse 6, Wien | 1846 |
| 14. | *Büchi,* Fr., Optiker, Bern | 1874 |
| 15. | *Burri,* Dr. phil., Prosektor | 1895 |
| 16. | *v. Büren,* Eug., allié von Salis, Sachwalter, Bern | 1877 |
| 17. | *Cherbuliez,* Dr. Direktor, Mülhausen | 1861 |
| 18. | *Coaz,* eidgenössischer Oberforstinspektor, Bern | 1875 |
| 19. | *Conrad,* Dr. Fr., Arzt in Bern | 1872 |
| 20. | *Cramer,* Gottl., Arzt in Biel | 1854 |
| 21. | *Crelier,* Dr., Sekundarlehrer in St. Immer | 1896 |
| 22. | *Dick,* Dr. Rud., Arzt in Bern | 1876 |
| 23. | *Droz,* Arnold, Kantonsschullehrer in Pruntrut | 1890 |

| | | Eintritt. |
|---|---|---|
| 24. | *Dubois*, Dr. med., Arzt, Privatdocent, Bern | 1884 |
| 25. | *Dumont*, Dr. med. F., Arzt, Privatdocent, Bern | 1890 |
| 26. | *Dutoit*, Dr. med., Arzt in Bern | 1867 |
| 27. | *Eggenberger*, J., Dr. phil., eidg. Beamter, Könizstr. 32, Bern | 1892 |
| 28. | *Engelmann*, Dr., Apotheker in Basel | 1874 |
| 29. | *v. Fellenberg*, Dr. phil. E., Bergingenieur, Bern | 1861 |
| 30. | *Fischer*, Dr. phil. Ed., Professor der Botanik, Bern | 1885 |
| 31. | *Fischer*, Dr. L., Professor der Botanik, Bern | 1852 |
| 32. | *v. Freudenreich*, Dr. E., Bern | 1885 |
| 33. | **Friedheim*, D., Prof., Bern | 1897 |
| 34. | *de Giacomi*, J., Dr. med., Arzt und Privatdocent, Bern | 1889 |
| 35. | *Girard*, Prof. Dr. med., Arzt in Bern | 1876 |
| 36. | *Gosset*, Philipp, Ingenieur, Wabern bei Bern | 1865 |
| 37. | *Graf*, Dr. J. H., Professor der Mathematik, Bern | 1874 |
| 38. | *Gressly*, Alb., Oberst, Maschinen-Ingenieur, Bern | 1872 |
| 39. | *Grimm*, J., Präparator, Bern | 1876 |
| 40. | *Gruner*, Dr. Paul, Gymnasiallehrer und Docent, Bern | 1892 |
| 41. | *Guillebeau*, Professor Dr., Bern | 1878 |
| 42. | *Haaf*, C., Droguist, Bern | 1857 |
| 43. | *Haas*, Dr. med. Sigismund, Arzt in Muri b. Bern | 1890 |
| 44. | *Hafner*, René, Apotheker in Biel | 1891 |
| 45. | *Hasler*, Dr. phil. G., Dir. d. Telegraphen-Werkstätte, Bern | 1861 |
| 46. | *Held*, Leon, Ingenieur, Bern | 1879 |
| 47. | *Holzer*, Ferd., Lehrer in Oberwyl bei Büren | 1890 |
| 48. | *Huber*, Dr. G., Professor der Mathematik, Bern | 1888 |
| 49. | *Huber*, Rud., Dr. phil., Gymnasiallehrer, Bern | 1891 |
| 50. | **Hug*, Otto, Dr. phil., Bern | 1897 |
| 51. | **Jadassohn*, Dr. Prof., Bern | 1897 |
| 52. | *Jenner*, E. Entomolog, hist. Museum, Bern | 1870 |
| 53. | *Jonquière*, Dr., Professor der Medicin, Bern | 1853 |
| 54. | *Jonquière*, Dr. med. Georg, Arzt in Bern | 1884 |
| 55. | *Käch*, P., Sekundarlehrer in Bern | 1880 |
| 56. | *Kaufmann*, Alfr., Dr. phil. und Gymnasiallehrer, Bern | 1886 |
| 57. | *Kesselring*, H., Lehrer an der Sekundarschule in Bern | 1870 |
| 58. | *Kissling*, Dr. E., Sekundarlehrer und Privatdocent, Bern | 1888 |
| 59. | *Kobi*, Dr., Rektor der Kantonsschule Pruntrut | 1878 |
| 60. | *Kocher*, Dr., Professor der Chirurgie, Bern | 1872 |
| 61. | *Koller*, G., Ingenieur, Bern | 1872 |
| 62. | *von Kostanecki*, Dr., Prof. der Chemie, Bern | 1896 |
| 63. | *König*, Emil, Dr. phil., Gymnasiallehrer, Bern | 1893 |
| 64. | *Körber*, H., Buchhändler in Bern | 1872 |
| 65. | *Kraft*, Alex., Besitzer des Bernerhofs, Bern | 1872 |
| 66. | *Krebs*, A., Seminarlehrer in Bern | 1888 |
| 67. | *Kronecker*, Dr. H., Professor der Physiologie, Bern | 1884 |
| 68. | *Kummer*, Dr. med. J., Arzt in Bern | 1890 |
| 69. | *Kürsteiner*, Dr. med., Bern | 1895 |
| 70. | *Lanz*, Dr. Em., Arzt in Biel | 1876 |
| 71. | *Leist*, Dr. K., Lehrer an der Sekundarschule, Bern | 1888 |
| 72. | *Lindt*, Dr. med. Wilh., Arzt in Bern | 1854 |
| 73. | *Lindt*, Dr. med., W. jun., Arzt und Docent, Bern | 1888 |
| 74. | *Lochbrunner*, Th., Uhrenmacher in Bern | 1896 |

| | | Eintritt. |
|---|---|---|
| 75. | *Lory,* C. L., Rentier, Münsingen | 1894 |
| 76. | *Lüscher,* E., Dr. med., Bern | 1895 |
| 77. | *Lütschg,* J., Waisenvater, Bern | 1872 |
| 78. | *Marckwald,* Dr. Max, Frankfurt a. M. | 1889 |
| 79. | *Marti,* Christian, Sekundarlehrer in Nidau | 1889 |
| 80. | *Marti,* Lehrer a. d. N. Mädchenschule, Bern | 1892 |
| 81. | *Moser,* Dr. phil. Ch., Privatdocent, Bern | 1884 |
| 82. | *Müller,* Emil, Apotheker in Bern | 1882 |
| 83. | *Müller,* Professor Dr., P., in Bern | 1888 |
| 84. | *Müller,* Max, Dr. med., Bern | 1893 |
| 85. | *Münger,* F., Dr. phil., Sekundarlehrer, Basel | 1892 |
| 86. | *v. Mutach,* Alfr., von Riedburg, Bern | 1865 |
| 87. | *Mützenberg,* Dr. med. Ernst, Spiez | 1885 |
| 88. | *Nanni,* Dr. Wilh., Arzt in Mühleberg | 1890 |
| 89. | *Nicolet,* L., Pharmacien, St. Imier | 1892 |
| 90. | **Otti,* Dr. Joh., Lehrer auf der Rütti | 1897 |
| 91. | *Pfister,* J. H., Mechaniker in Bern | 1871 |
| 92. | *Pflüger,* Dr. Professor, Bern | 1889 |
| 93. | *Pulver,* E., Apotheker in Interlaken | 1890 |
| 94. | *Pulver,* G., Vorsteher in Hindelbank | 1891 |
| 95. | *Ris,* F., Lehrer der Physik am städt. Gymnasium | 1869 |
| 96. | *Rossel,* A. Dr., Professor der Chemie, Luterbach | 1893 |
| 97. | *Rothenbach,* Alfr., Gasdirektor in Bern | 1872 |
| 98. | *Rothenbühler,* Sekundarlehrer, Bern | 1896 |
| 99. | *Rubeli,* Dr. O., Professor an der Tierarzneischule, Bern | 1892 |
| 100. | *Sahli,* Professor Dr. H., in Bern | 1875 |
| 101. | *Schällibaum,* Dr. H., Arzt in Sils-Maria | 1889 |
| 102. | *Schaffer,* Dr., Kantonschemiker und Docent, Bern | 1878 |
| 103. | *Schlachter,* Dr., Lehrer an der Lerberschule, Bern | 1884 |
| 104. | *Schmid,* Dr. W., Major im Generalstab, Bern | 1891 |
| 105. | *Schmidt,* F. W., Dr. phil., Assistent am chem. Laboratorium, Bern | 1893 |
| 106. | *Schönenberger,* eidgen. Forstadjunkt, Bern | 1894 |
| 107. | *Schuppli,* M., Direktor der N. Mädchenschule, Hilterfingen | 1870 |
| 108. | *Schütz,* Assistent des Kantonschemikers, Bern | 1896 |
| 109. | *Schwab,* Alfr., Banquier in Bern | 1873 |
| 110. | *Schwab,* Sam., Dr. med., Bern | 1885 |
| 111. | *Sidler,* Dr., Professor der Astronomie, Bern | 1872 |
| 112. | *Stähli,* F., Dr. phil., Gymnasiallehrer in Burgdorf | 1893 |
| 113. | *Steck,* Th., Dr. phil., Conservator am Naturhist. Museum, Bern | 1878 |
| 114. | **v. Steiger,* Hans, Major, Bern | 1897 |
| 115. | *Stooss,* Prof. Dr. med. Max, Arzt in Bern | 1883 |
| 116. | *Strasser,* Dr. Hans, Professor der Anatomie, Bern | 1872 |
| 117. | *Studer,* Bernhard, sen., Bern | 1844 |
| 118. | *Studer,* Bernhard, Apotheker, Bern | 1871 |
| 119. | *Studer,* Dr. Theophil, Professor der Zoologie, Bern | 1868 |
| 120. | *Studer,* Wilhelm, Apotheker in Bern | 1877 |
| 121. | *Tambor,* J., Dr. phil., Chem. Laboratorium, Bern | 1894 |
| 122. | *Tanner,* G. H., Apotheker in Bern | 1882 |
| 123. | *Tavel,* Professor Dr. E., Bern | 1892 |
| 124. | *Thiessing,* Dr., Redaktor, Bern | 1867 |

| | | Eintritt. |
|---|---|---|
| 125. | *v. Tscharner,* Dr. phil. L., Oberstlt., Bern | 1874 |
| 126. | *v. Tscharner-de Lessert,* Oberstlieutenant, Bern | 1878 |
| 127. | *Tschirch,* Dr. A., Professor der Pharmakognosie in Bern | 1890 |
| 128. | *Valentin,* Professor Dr. med. Ad., Arzt in Bern | 1872 |
| 129. | *Volz,* Wilhelm, Apotheker in Bern | 1887 |
| 130. | *Wäber-Lindt,* A., Bern | 1864 |
| 131. | *Wagner,* Karl, Dr. phil., Enge-Zürich | 1892 |
| 132. | *Walthard,* Max, Dr. med., Arzt in Bern | 1894 |
| 133. | *Wanzenried,* Sekundarlehrer in Grosshöchstetten | 1867 |
| 134. | *v. Wattenwyl-v. Wattenwyl,* Jean, Grossrat, Bern | 1877 |
| 135. | *Weingart,* J., Schuldirektor in Bern | 1875 |
| 136. | *Wäthrich,* Dr. phil. E., Direktor der Molkereischule Rütti | 1892 |
| 137. | *Wyss,* Dr. G., Buchdrucker in Bern | 1887 |
| 138. | *Wyttenbach-v. Fischer,* Dr., Arzt in Bern | 1872 |
| 139. | *de Zehender,* Marq., Ingenieur, Bern | 1874 |
| 140. | *Zeller,* R., Dr. phil., Geolog, Bern | 1893 |
| 141. | *Ziegler,* Dr. med. A., eidgen. Oberfeldarzt, Bern | 1859 |
| 142. | *Zumstein,* Dr. med. J. J., in Marburg | 1885 |
| 143. | *Zwicky,* Lehrer am städt. Gymnasium, Bern | 1856 |

---

**Im Jahre 1897 ausgetreten:**

| | | |
|---|---|---|
| *Berlinerblau,* Dr., Sosnowice | | 1887 |
| *Frank,* L., Assistent am chem. Laboratorium, Bern | | 1859 |
| *Fueter-Schnell,* Apotheker, Bern | | 1894 |
| *Hess,* E., Professor an der Tierarzneischule | | 1883 |

---

**Im Jahre 1897 verstorben:**

| | | |
|---|---|---|
| *Bourgeois,* E., Dr. med., Arzt in Bern | | 1872 |
| *Drechsel,* Prof. Dr., Bern | | 1892 |
| *Rothen,* Dr. phil., internationaler Telegraphendirektor, Bern | | 1872 |
| *Wander,* Dr. phil., Chemiker, Bern | | 1865 |

---

**Korrespondierende Mitglieder:**

| | | |
|---|---|---|
| 1. | *Biermer,* Dr. Professor in Breslau | 1861 |
| 2. | *Flesch,* Dr. M., Arzt in Frankfurt | 1882 |
| 3. | *Gasser,* Dr. E., Professor der Anatomie in Marburg | 1884 |
| 4. | *Graf,* Lehrer, in St. Gallen | 1858 |
| 5. | *Grützner,* Dr. A., Prof. in Tübingen | 1881 |
| 6. | *Hiepe,* Dr. Wilhelm, in Birmingham | 1874 |
| 7. | *Imfeld,* Xaver, Topograph in Hottingen | 1880 |
| 8. | *Krebs,* Gymnasiallehrer in Winterthur | 1864 |

| | | Eintritt. |
|---|---|---|
| 9. | *Landolf,* Dr., in Chili . . . . . | 1881 |
| 10. | *Lang,* Dr. A., Professor in Zürich . . . . . | 1876 |
| 11. | *Leonhard,* Dr., Veterinär in Frankfurt . . . . | 1870 |
| 12. | *Lichtheim,* Professor in Königsberg . . . . . | 1881 |
| 13. | *Metzdorf,* Dr. Professor der Vet.-Sch. in Proskau, Schlesien | 1870 |
| 14. | *Petri,* Dr. Ed., Prof. der Geographie in St. Petersburg . | 1883 |
| 15. | *Pütz,* Dr. H., Professor der Vet.-Med., Halle a. S. . . | 1870 |
| 16. | *Regelsperger,* Gust., Dr., rue la Boétie 85, Paris . . | 1883 |
| 17. | *Rothenbach,* Lehrer am Lehrerseminar in Küssnacht . . | 1871 |
| 18. | *Wälchli,* Dr. med. D. J., Buenos Ayres . . . . | 1873 |
| 19. | *Wild,* Dr. Professor, in St. Petersburg . . . . | 1859 |

## Aufnahmen im Jahre 1897.

*v. Steiger,* H., Major, Bern.
*Otti,* Joh., Dr., Lehrer auf der Rütti.
*Hug,* Otto, Dr., Bern.
*Jadassohn,* Prof., Dr., Bern.
*Friedheim,* Prof., Dr., Bern.

# Auszug

aus der

## Jahres-Rechnung der Bernischen Naturforschenden Gesellschaft.

1896

### Einnahmen.

| | | |
|---|---|---|
| An Jahresbeiträgen | Fr. | 1208. — |
| An Eintrittsgeldern | „ | 20. — |
| An Zinsen | „ | 105. 05 |
| An verkauften Mitteilungen | „ | 60. — |
| Aus dem Reservefonds | „ | 228. 55 |
| | Fr. | 1621. 60 |

### Ausgaben.

| | | |
|---|---|---|
| Passiv-Saldo letzter Rechnung | Fr. | 142. 24 |
| Mitteilungen | „ | 857. 10 |
| Sitzungen | „ | 117. 50 |
| Bibliothek | „ | 193. 05 |
| Lesezirkel | „ | 188. 80 |
| Verschiedenes | „ | 351. 81 |
| | Fr. | 1850. 50 |

### Bilanz.

| | | |
|---|---|---|
| Die Ausgaben betragen | Fr. | 1850. 50 |
| Die Einnahmen betragen | „ | 1621. 60 |
| Es ergibt sich demnach ein Passiv-Saldo von | Fr. | 228. 90 |

### Reservefonds.

| | | |
|---|---|---|
| Saldo letzter Rechnung | Fr. | 2528. 55 |
| im Rechnungsjahr bezogen | „ | 228. 55 |
| Bestand auf 31. Dezember 1896 | Fr. | 2300. — |

### Vermögensetat.

| | | |
|---|---|---|
| Das Vermögen besteht auf 31. Dezember 1896 im Reservefonds | Fr. | 2300. — |
| weniger dem Passiv-Saldo obiger Rechnung | „ | 228. 90 |
| | Fr. | 2071. 10 |

Der Kassier: **B. Studer**, Apoth.

A. Baltzer.

# Notiz über ein Mineralvorkommen im Berneroberland.

(Eingereicht den 12. März 1897.)

Im Quellgebiet der grossen Emme befindet sich eine ziemlich ansehnliche Alp, die Riedernalp (bei circa 1400 m.). Sie liegt, näher bezeichnet, auf der Rück- oder nördlichen Seite des Riedergrates, der selbst nichts anderes ist als eine Fortsetzung des Brienzergrates.

Von dieser Alp nun wurden in neuerer Zeit eigenthümliche graue, schwere Kugeln bekannt, die mir von Herrn Pfarrer Studer in Ringgenberg zur Untersuchung freundlichst mitgetheilt wurden.[1]) Form rund oder länglichrund, die eine der Kugeln hat $2^1/_2$ die andere 6 cm. Längs- und 5 cm. Querdurchmesser. Auch grössere sollen vorkommen. Inneres dunkelgrau, Aussenseite hell. Die 1 mm. dicke Rinde geht allmählig in die dunkle Masse über. Das Innere besteht in der Hauptsache aus der dunkelgrauen, gleichmässig dichten Substanz. Der Kern dagegen ist deutlich krystallinisch, theils hell, durchsichtig, theils schwach nelkenbraun gefärbt, mit dem Messer leicht ritzbar. Von ihm ziehen sich unregelmässige Adern sternförmig in die Masse hinein, bis nahe an die Peripherie, was bei beiden der mir vorliegenden Kugeln zu sehen ist. Bei der einen tritt gleichzeitig eine undeutliche peripherische Anordnung der Adern auf.

[1]) Ich spreche dafür Herrn Pfarrer Studer meinen verbindlichsten Dank aus und bin überhaupt für Mittheilung neuer Vorkommnisse an Versteinerungen und Mineralien unserer Gegend immer dankbar. Während ich von Personen der verschiedensten Stände unseres Kantons schon öfters im Lauf der letzten 12 Jahre Anfragen oder Zusendungen erhielt, glänzten nur die Landärzte auffallender Weise durch anscheinend gänzliche Interesselosigkeit für Geologie! Es mag dies an der Vernachlässigung dieses Faches in Folge der streng beruflichen Ausbildung unserer Mediziner an der Hochschule liegen.

Die graue Hauptmasse hat unebenen Bruch, Härte etwas über 3, braust mit Säuren langsam aber anhaltend auf (auch mit verdünnter Essigsäure). Aufbau gleichmässig, weder schalig noch strahlig.

Die qualitative Analyse ergab mir Baryt, Kalk, Schwefelsäure, Kohlensäure; ferner Spuren von Eisen, Thonerde und Strontian. Im salzsauren Auszug ist Baryt nicht, dagegen Kalk und eine Spur Strontian vorhanden. Aller Baryt ist also an Schwefelsäure gebunden. Auf der Kohle mit Soda erhitzt entsteht eine schmutzig-röthliche undurchsichtige Masse.

Die weisse krystallinische Kernsubstanz konnte wegen Mangel an reinem Material noch nicht näher untersucht werden, kann indessen nach einigen Vorversuchen dieselben Bestandtheile wie die graue Masse enthalten. Möglicherweise handelt es sich hier um Kalkbaryt, Dreelit oder auch nur um ein Gemeng von Kalkspath und Baryt.

Hiernach sind die Kugeln Concretionen[1]) von dichtem Schwerspath, gemengt mit circa $^1/_8$—$^1/_4$ von kohlensaurem Kalk[2]); der krystallinische Kern bleibt ausser Betracht.

Die Art des Vorkommens ist mir unbekannt. Bei Kaufmann[3]) finde ich nichts darüber, auch nicht in Kenngott's Mineralien der Schweiz. Jener gibt in dieser Gegend (Blatt XIII der geologischen Karte) unteren Flysch und Wangschichten an; es ist möglich, dass die Kugeln in den letzteren vorkommen, da genannter Autor in ihnen Feldspath, Quarz, Glauconit, Pyrit anführt.

---

[1]) Genau genommen zeigen sie die Merkmale von Con- und Secretionen (sogenannte Septarien). Die Concretion trocknete aus, erhielt ein sternförmiges Risssystem und auf demselben erfolgte die Infiltration und Ausfüllung durch die krystallinische Masse.

[2]) Chemische Bindung desselben wegen Ausziehbarkeit durch Essigsäure nicht wahrscheinlich.

[3]) Beiträge z. geol. Karte d. Schweiz XXIV, 1.

E. Kissling.

# Neue Funde von diluvialen Arctomysresten aus der Umgegend von Bern.

(Eingereicht am 9. März.)

Seitdem durch *Th. Studer* die *Arctomysreste* aus den glacialen Ablagerungen der näheren Umgebung von Bern[1]) bekannt geworden sind, wurden in jüngerer und letzter Zeit 2 Funde gemacht, welche ein relativ bedeutendes Material geliefert haben und die in den nachfolgenden Zeilen kurz beschrieben werden sollen.

Die eine der Fundstellen befindet sich auf dem *Ferrenberg* bei *Stettlen*, die andere im *Steinibach* bei *Belp*.

Am südlichen Gehänge des *Bantigers*, ungefähr 150 m. über der Sohle des Worblenthales, ist ein deutlich ausgesprochenes Plateau vorhanden, bedeckt von glacialen Ablagerungen, z. Th. typischen Wallmoränenformen. Eine dieser Moränen sitzt unmittelbar auf den Molasseschichten, welche den Abhang gegen das Dorf *Stettlen* zusammensetzen, auf und ist auf der Karte bezeichnet mit dem Namen «*Buchholz*». Es ist dies ein bewaldeter Rücken, der sich so ziemlich in der Nord-Südrichtung hinzieht und dessen convexe Seite nach Osten gerichtet ist.

Am südlichen Ende des Walles nun, und zwar auf seiner Aussenseite wurde in jüngster Zeit in der Höhe von circa 650 m. eine Kiesgrube angelegt. In dem tiefen Einschnitt erkennen wir folgendes Profil:

[1]) *Th. Studer*: Ueber die Arctomysreste aus dem Diluvium der Umgegend von Bern. Mittheilungen d. naturf. Ges. Bern. 1888, pag. 71 u. ff.

1) sandige Letten 2m.
2) gelbe Letten
3) Schicht mit groben, meist eckigen Blöcken (Oberflächenmoräne)
4) feinen Kies in Form eines Stockes, an welchen sich die unter 1—3 genannten Schichten anlegen, ein ähnliches Verhältniss, wie es gegenwärtig beim Durchstich der Endmoräne des Aaregletschers beim Schänzli zu beobachten ist.

Das Material aus Schicht 3 weist auf Anwesenheit des Aargletschers hin. Es kommen vor zahlreiche Blöcke von typischem Protogin; seltener sind sericitische Gneisse, schwarze Alpenkalke und Niesensandsteine, häufig aber Molasseblöcke, was auf lokale Aufarbeitung schliessen lässt.

Während so auf dem Plateau oben Aaregletschermaterial liegt, sind für die Thalsohle unzweifelhafte Rhonegeschiebe nachgewiesen. (Euphotid bei Sinneringen durch Dr. v. Fellenberg, Eklogit beim Ziegelhäusi durch den Verfasser.)

In der Schicht 4 nun sind zu Beginn dieses Jahres Murmelthierknochen gefunden worden, auf die mich Herr Lehrer Frauchiger in Stettlen aufmerksam gemacht hat.

Die Ueberreste gehören wenigsten 4 verschiedenen Individuen an. Es sind:

1) Ein vollständig erhaltener Schädel mit zugehörigem, linkem Unterkiefer, von brauner Farbe, einem alten Thiere angehörend.
2) Der Schädel eines alten Thieres mit linkem Unterkiefer. Nasenbeine und ein Theil des linken Oberkiefers fehlen; Nagezähne von intensiv gelber Farbe.
3) Die beiden Unterkiefer eines mittelgrossen Thieres. Die Mahlzähne zeigen merkwürdig stark abgekaute Flächen. Der vorderste Prämolar mit sehr undeutlichem Höcker.
4) Ein defekter Schädel mit zugehörigen Unterkiefern eines jungen, eben im Zahnwechsel begriffenen Thieres. Der vorderste Milchzahn mit nur zwei Wurzeln und schwach angedeutetem Höcker.

Ausserdem fanden sich noch:

3 Humeri, sämmtliche mit den Knochenbrücken, 2 Ulnae, 2 Radii, 2 Beckenhälften, 3 Oberschenkelknochen, 1 Tibia und endlich 14 Wirbel, worunter Atlas und Epistropheus.

Ueber die Grössenverhältnisse der Schädel 1 und 2 gibt die nachstehende Tabelle Aufschluss.

Was nun den Fund vom Buchholz bemerkenswerth macht, ist der Umstand, dass die sämmtlichen Knochen beisammen in einer noch wohlerhaltenen Fluchtröhre lagen. Leider war diese zur Zeit, da ich mich an Ort und Stelle begab, von den Arbeitern bereits zerstört.

Hingegen waren etwas höher oben in dem stockförmigen Kies 4 andere Röhren sehr schön zu sehen, von denen zwei etwa 1 m., die beiden anderen 1,5 m. weit in die Moräne hinein gereicht haben mögen, und die einen Durchmesser von ungefähr 1 dm. besassen. Am Boden fand sich, namentlich gegen das hintere Ende zu, eine eigenthümliche, schwarzbraune, organische Masse. (Reste von Excrementen?) Die Wände sodann waren ausgekleidet mit einem schneeweissen, flaumigen Ueberzug, der sich bei der Prüfung als kohlensaurer Kalk erwiesen hat.

Nach den angeführten Verhältnissen zu schliessen, darf man wohl annehmen, dass der abgedeckte Bau eine Sommerwohnung gewesen ist.

---

Ein ebenso interessanter Fund ist im Sommer 1893 im *Steinibach* bei *Belp* gemacht worden.

Nordwärts vom genannten Orte beginnt eine Seitenmoräne des Aaregletschers, die sich verfolgen lässt bis in die Gegend von *Kaufdorf* und so als seitlicher Wall das Belpbecken begrenzt auf eine bedeutende Erstreckung hin. Nach dem Becken zu fällt die Moräne ziemlich steil ab und geht dann über in vorerst noch unregelmässig geschichteten Glacialschutt, welcher weiter unten am Gehänge zur typischen Deltabildung wird, deren schiefe, gegen das Becken zu einfallende Schichtung aufgeschlossen ist in einer Kiesgrube ob dem Hofe *Scheuermatt*.

Unmittelbar unter dem Wirthshaus zum Steinibach ist am Abhang eine Grube angelegt worden (auf Quote 540 circa), aus welcher der Eigenthümer, Herr Wirth Steffen, gelegentlich das nöthige Schottermaterial gewinnt.

Dort deckten die Arbeiter in dem feinen Kies Murmelthierreste auf, die von den Herren Steffen und Sekundarlehrer Lory sorgfältig gesammelt und sodann durch Herrn Dr. Steck dem Museum in Bern übergeben worden sind.[1])

[1]) Herr Prof. Studer war so freundl., mir die Schädel zur Messung zu überlassen.

Die Knochen lagen in einem 50 cm. im Durchmesser haltenden Kessel, der ungefähr 6 m. tief im Moränenschutt drin angelegt war. Wir haben daher offenbar eine geräumige Winterwohnung vor uns, in welcher eine ganze Familie vom Untergang ereilt worden ist.

Es fanden sich:

1) Ein vollständiger Schädel und beide Unterkiefer eines alten Thieres.
2) Ein vollständiger Schädel mit beiden Unterkiefern, von etwas geringeren Dimensionen, als der vorige.
3) Ein Schädel mit abgebrochenen Jochbogen und die zwei Unterkiefer eines alten Thieres.
4) Ein defekter Schädel mit abgebrochenen Jochbogen und zwei Unterkiefer eines jüngeren Thieres.

Von den zahlreichen weiteren Skelettheilen sind zu nennen: 6 Schulterblätter, 7 Oberarmknochen, sämmtliche mit den Knochenbrücken, 4 Radii, 5 Ulnae, 6 Beckenhälften, 6 Oberschenkelknochen, 7 Tibiae, 2 Fibulae, 4 Kreuzbeine und 47 Wirbel.

Von den 4 Kreuzbeinen zählt eines 4 Wirbel; der letzte ist vom dritten durch eine deutlich sichtbare Naht getrennt.

Die beiden Funde vermehren so die bis jetzt bekannten Reste der **Marmotta** nebst anderen Skelettstücken um 7 Schädel, unter welchen 3 vollständig erhaltene und 14 Unterkiefer.

Für 6 der Schädel habe ich in der nachstehenden Tabelle die wichtigeren Masse nach *Hensel*[1]) eingetragen.

| | *Buchholz* bei *Stettlen.* | | *Steinibach* bei *Belp.* | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Nr. 1. | Nr. 2. | Nr. 1. | Nr. 2. | Nr. 3. | Nr. 4. |
| Basilarlänge | 95 | 93 | 95 | 93 | 93 | 83 |
| Scheitellänge | 114 | — | 110,5 | 108 | — | 88 |
| Grösste Breite an den Jochbogen | 64 | 62 | 64 | 62 | 58 | — |
| Grösste Breite des Hinterhauptes | 45,5 | 44 | 44 | 42,5 | — | — |
| Höhe des Hinterhauptes | 29 | 26 | 29 | 27 | 27 | 24 |
| Länge des Unterkiefers | 68 | 66,5 | 68 | 65 | 64,5 | 58 |

[1]) Hensel, Mammologische Notizen. Archiv f. Naturgesch., 45. Jahrgang, 2. Heft, pag. 202 u. f.

Unter den Schädeln sind die beiden Nr. 1 vom Buchholz und vom Steinibach mit einer Basilarlänge von 95 mm. die grössten bis dahin in unserer Umgebung aufgefundenen. (Der grösste von Studer gemessene Schädel von Grafenried misst nur 92 mm.)

Recht auffallend ist der Unterschied in der Breite an den Jochbogen gegenüber einem *Bobac*. Während diese an unseren grössten Schädeln nur 64 mm. beträgt, erreicht sie bei einem Bobacschädel von 92 mm. Basilarlänge 67 mm.

In sämmtlichen Unterkiefern hat der vorderste Prämolar, wie es für *Marmotta* charakteristisch ist, 3 Wurzeln und lässt auf seiner Vorderseite den kleinen Höcker erkennen, der jedoch nicht immer deutlich ausgeprägt ist.

J. H. Graf.

# Die Exhumirung Jakob Steiner's

und die

# Einweihung des Grabdenkmals Ludwig Schläfli's

anlässlich der Feier des hundertsten Geburtstages Steiner's

**am 18. März 1896.**

(Mit 3 Beilagen.)

Am 1. April 1863 starb in Bern der grosse Synthetiker *Jakob Steiner* von Utzenstorf.

Schon 1834 zum Mitgliede der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften ernannt, wurde er 1835 ausserordentlicher Professor der Mathematik an der Berliner Universität und blieb in dieser bescheidenen Stellung bis an das Ende seiner Thätigkeit als Lehrer. Diese ausserordentliche Professur war speziell für ihn geschaffen worden. Steiner ist aber nie zum ordentlichen Professor befördert worden. Steiner [1]) hat diese Nichtbeachtung seiner Verdienste tief empfunden; auf seine Eingabe um gebührende Stellung hat er nicht einmal Antwort und seit 22 Jahren keine Beförderung erhalten, worüber ihn allerdings Staatsrath *v. Herrmann* in München mit den Worten tröstete, dass dies «nur zu Preussens nicht zu seiner Schande gereiche, habe er doch eine geometrische Welt geschaffen». Gekränkt hat es ihn aber doch, ja er konnte diese persönliche Missachtung auf dem Todbette noch nicht einmal vergessen. Dies und anderes machten, dass Steiner mit der Mitwelt allmählig zerfiel. Er ver-

[1]) Vergleiche Graf J. H., «Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli.» Bern. Mittheilungen 1896, S. 256 und Separatabzug S. 200.

bitterte sich in seinen letzten Lebensjahren immer mehr das Leben, ja ein menschenfeindliches Misstrauen beschlich seine Natur; er nannte sich selbst einen ausgebrannten Krater. Treffender vergleicht ihn *C. F. Geiser* mit dem verstümmelten Torso eines Herkules.

*E. Lampe* sagt mit Recht:[1]) «Ein letztes frohes Aufleuchten «eines tief angelegten, aber verkümmerten Gemüthlebens in dem ver-«bitterten, kranken Geiste des grossen Berliner Mathematikers war «die Freundschaft mit L. Schläfli. In der Stadt und in dem Lande, «wo er die höchste wissenschaftliche Anerkennung und ehrenvolle «Stellung (vergleiche oben) gefunden hatte, welche die Heimath ihm «nicht gewährte,[2]) hatte er keinen dauernden Freund gewonnen, war «insbesondere mit seinen gleichaltrigen Fachgenossen zerfallen, hatte «mit den jüngeren derselben keine Verbindung geknüpft oder auch «nur zu knüpfen gesucht. Da bescheerte ihm das Schicksal aus «seinem Geburtslande einen jüngern Freund, der sich mit ganzer «Seele ihm anschloss und die Tragik seines Lebens war es, dass er «nach wenigen Jahren innigen Verkehrs auch diesen Freund wieder von «sich scheuchte.»

Lampe erzählt weiter, wie er Steiner, damals ein gebrochener Mann ohne Spannkraft, in den Wintern 1860/61 und 1861/62 noch zum Lehrer gehabt habe.[3]) Im jetzt verschwundenen Café de Bavière in der französischen Strasse ass Steiner damals zu Mittag und hielt daselbst auf einem Ecksopha seinen Verdauungsschlummer. Wenn dann Abends um 8 Uhr die akademische Liedertafel im Nebensaal ihre Uebungen begann, erhob er sich schwerfällig und verschwand.

Nach Bern übergesiedelt wohnte er vorübergehend im Gasthof zum wilden Mann, ist dann, als seine Krankheit, die Wassersucht, immer fortschritt, in ein Zimmer ob der sogenannten alten Schaal an der Kramgasse übergesiedelt, wo er auch gestorben ist. Seinem Sarge, der im Monbijou-Kirchhofe beigesetzt wurde, folgten wenige Freunde; sein manuscriptlicher Nachlass wurde auf der Bibliothek der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft deponirt, aber leider so

[1]) Naturwissenschaftliche Rundschau v. W. Sklarek XII., Nr. 1, S. 15, bei Anlass der Besprechung des von uns herausgegebenen Briefwechsels zwischen Jakob Steiner u. L. Schläfli.

[2]) Nicht ganz zutreffend, da man daran dachte, ihm an der Berner Hochschule eine Stellung zu schaffen.

[3]) Steiner war während des Sommersemesters zur Herstellung seiner Gesundheit beurlaubt.

elend aufbewahrt, dass einige Manuscripte arg beschädigt sind und sicher alle zu Grunde gegangen wären, wenn wir sie nicht beim Antritt des Amtes als Oberbibliothekar der Gesellschaft gefunden und sofort Sorge für bessere Aufbewahrung getroffen hätten. Die Papiere wurden von Prof. Dr. *F. Bützberger* an der Kantonsschule in Zürich einer Durchsicht und Ordnung unterzogen und wie es mit seinem Nachlass gegangen, so ging es auch, es muss, wenn schon nicht zur Ehre der schweizerischen Mathematiker, gesagt werden, mit seinem Grab. Vergessen und verschwunden schien die Stätte, die seine irdische Hülle barg, bis in den achtziger Jahren die beiden jungen strebsamen Mathematiker, Herr Dr. *Christian Moser*, jetzt Docent und Mathematiker im eidgenöss. Industrie-Departement, und der schon genannte Dr. *F. Bützberger*, damals Lehrer in Langenthal, an der Hand der Kontrollen des Friedhofes die Grabstätte wieder auffinden konnten. Herr Prof. Dr. *Georg Sidler* liess dann auf seine Kosten einen einfachen Grabstein setzen, der die Inschrift trug: «Jakob Steiner, Mathematiker und Akademiker in Berlin 1796 bis 1863».

Der Monbijou-Friedhof in Bern soll anderen Zwecken dienen und zum Theil als Promenade, zum Theil als Bauplatz verwendet werden, desshalb hielten es die Docenten der Mathematik an der Hochschule Bern, die Herren Prof. Dr. G. Huber, Prof. Dr. G. Sidler, Prof. Dr. E. Ott und Dr. Christian Moser und der Berichterstatter für ihre Pflicht, rechtzeitig alle Rechte zu sichern für die Exhumation der sterblichen Reste Steiner's. Schon am 25. Mai 1894 richteten wir ein Gesuch in diesem Sinne an die städtische Baudirektion, welche unsere Bitte am 6. Juni der städtischen Polizei-Direktion übermittelte.

Inzwischen verstarb am 20. März 1895 in Bern nach langen schmerzhaften Leiden Prof. Dr. Ludwig Schläfli. Sein Sterbezimmer liegt an der Könizstrasse und von dessen Fenster konnte man auf die Stätte im Monbijou hinblicken, wo sein congenialer älterer Freund, Jakob Steiner, die Ruhestätte gefunden hatte. Es reifte bei uns der Gedanke, zugleich mit der Exhumation Steiner's, die am 18. März 1896, an seinem 100jährigen Geburtstag stattfinden sollte, Schläfli ein Grabdenkmal zu setzen. Es bildete sich das nachgenannte Steiner-Schläfli-Comité, welches folgendes Cirkular an alle schweizerischen Mathematiker erliess:

«Am 18. März nächsten Jahres kehrt der 100jährige Geburtstag des grossen Mathematikers *Jakob Steiner* von Utzenstorf wieder. Seine sterblichen Reste befinden sich im Monbijou-Friedhofe in Bern

begraben. Da dieser Friedhof demnächst einer andern Bestimmung gewidmet werden soll, so trat an uns der Gedanke heran, die sterblichen Reste Steiner's zu exhumiren und an anderer Stätte der Erde wieder zu übergeben. In ausserordentlich zuvorkommender Weise hat uns der Gemeinderath der Stadt Bern eine Grabstätte in der Reihe der konzessionirten Gräber gratis zur Verfügung gestellt, so dass der Exhumirung Steiner's nichts mehr im Wege steht. Wir gedenken dieselbe aber aus naheliegenden Gründen auf den 18. März 1896 zu verschieben. Sodann kommt noch der Umstand hinzu, dass mit dem 20. März der Todestag unseres Altmeisters der Mathematik *Ludwig Schläfli* wiederkehrt, der bekanntlich dieses Jahr verstorben ist, und dessen Grab auch auf dem gegenwärtig benutzten Bremgarten-Friedhof sich befindet.

Das Comité hat sich ferner die Aufgabe gestellt, die Grabstätte Schläfli's zu sichern; der Tit. Gemeinderath der Stadt Bern ist uns auch hier auf das Freundlichste entgegengekommen und will gegen eine Gebühr von 250 Fr. (die Hälfte der üblichen) Schläfli's Grabstätte ebenfalls zu den konzessionirten d. h. auf 60 Jahre hinaus gesicherten erklären. Endlich soll das Grab Schläfli's, wie es sich wohl für den grossen und einfachen Gelehrten, der er war, geziemt, mit einem bescheidenen Monument geschmückt werden.

Sowohl die Angelegenheit Steiner's als die Grabstätte und das Monument Schläfli's verursachen immerhin bedeutende Kosten, für deren Aufbringung wir uns in allererster Linie an die schweizerischen Verehrer, Schüler und Freunde der beiden Mathematiker wenden.

Wir bitten alle diejenigen, welche gewillt sind, etwas an die Unkosten beizutragen, gefälligst den nebenstehend angehängten Subskriptionszeddel auszufüllen und an Prof. Dr. J. H. Graf, Wylerstr. 10, Bern, einsenden zu wollen. Das Comité wird nach Erledigung der beiden Angelegenheiten nicht verfehlen, zu Handen der Subskribenten Rechnung zu stellen. Mit Hochschätzung und Dank Namens des Steiner-Schläfli-Comités: Prof. Dr. C. F. Geiser, Zürich; Prof. Dr. H. Kinkelin, Basel; Prof. Dr. Hugo Schiff, Florenz; Prof. Dr. G. Sidler; Prof. Dr. G. Huber; Prof. Dr. E. Ott; Dr. Ch. Moser, Docent; Dr. F. Büzberger, Burgdorf; Prof. Dr. J. H. Graf.»

Speziell wurde auf die Bitte von Hugo Schiff, der ein intimer Freund Schläfli's war, was auch daraus hervorgeht, dass die letzte Postkarte Schläfli's, die er nicht einmal fertig schreiben konnte, an ihn gerichtet war, beschlossen, es ihm zu überlassen auch einige

italienische Mathematiker zur Subskription heranzuziehen. Es rechtfertigte sich dadurch, dass L. Schläfli mit vielen italienischen Mathematikern wie Cremona, Casorati, Beltrami, Brioschi, Chelini, Battaglini u. s. w. im intimen Verkehr gestanden hatte. Ausserdem hatte die treue Haushälterin und langjährige Pflegerin Schläfli's, die er auch testamentarisch zur Erbin seines Nachlasses eingesetzt hat, aus freien Stücken sich verpflichtet den allfälligen Rest, welchen die Subskription nicht decken würde, zu übernehmen. Auf Ansuchen des Comités hat der Gemeinderath der Stadt Bern in bereitwilligster Weise für die sterblichen Reste Jakob Steiner's gratis im Bremgarten-Friedhofe eine reservirte Grabstätte zur Verfügung gestellt und die Erlaubniss zur Exhumation gegeben.

Wir hatten, um dies zu erreichen, folgendes Schreiben abgesendet:

Bern, den 31. Juli 1895.

«*An den Tit. Gemeinderath der Stadt Bern.*

Hochgeehrter Herr Präsident! Hochgeehrte Herren!

«Am 1. April 1863 verstarb in unserer Stadt *Jakob Steiner* von *Utzenstorf*, gewesener Professor der Mathematik in Berlin und Mitglied der dortigen königl. Akademie der Wissenschaften. Steiner wurde sodann auf dem Monbijou-Friedhofe beerdigt und Freunden gelang es, sein Grab ausfindig zu machen und ihm einen einfachen Grabstein zu setzen. In kurzer Frist wird das Areal des Monbijou andern Bestimmungszwecken gewidmet werden, daher tritt die Frage an uns heran, was mit den sterblichen Resten Steiner's geschehen soll. Man macht es der vorigen Generation zum Vorwurf, dass sie nicht einmal die sterblichen Reste des grossen Haller der Nachwelt habe überliefern können, sollen wir in unserm Fall, wo es sich um einen auf dem Gebiete der Mathematik bedeutenden Mann handelt, ähnlich verfahren? Steiner, der Begründer einer ganz neuen Disciplin, der synthetischen Geometrie, ein Mann, dessen Werke auf Kosten der Akademie herausgegeben wurden, wird nach Jahrhunderten noch als Autorität und erfinderischer Geist auf dem Gebiete der Mathematik von der Welt anerkannt werden und die Nachwelt würde strenge mit uns zu Gerichte sitzen, wenn wir, als die Vertreter seines Faches, nicht alles aufwenden würden, seine Ueberreste vor Profanation zu schützen und intakt aufzubewahren.

Eine Mittheilung der städtischen Polizei-Direktion stellte fest,

Ansicht des Schädels Steiner's aufgenommen bei Anlass der Exhumation am 18. März 1896

dass der Exhumirung der Gebeine Steiner's nichts im Wege stehe, setzt aber die Gebühr für ein Grab im Bremgarten-Friedhofe auf 500 resp. 600 Franken fest.

Angesichts der eminenten Bedeutung des Mannes als Forscher scheint uns aber, wäre es wohl angezeigt, wenn der Tit. Gemeinderath eine Grabstätte gratis dem unterfertigten Comité für die Exhumirung Steiner's zur Verfügung stellen würde.

Da wir überzeugt sind, bei Ihnen, hochgeehrte Herren, auf eine richtige Würdigung des grossen Mannes bauen zu dürfen, so wagen wir es, Ihnen das höfliche Gesuch zu unterbreiten:

«Der Tit. Gemeinderath der Stadt Bern möchte für die Exhu-«mirung des grossen Mathematikers Jakob Steiner eine Grabstätte im «Bremgarten-Friedhofe unentgeltlich gewähren».

Indem wir Ihnen, hochgeehrte Herren, die Angelegenheit zu geneigter Erledigung unterbreiten, zeichnen mit vollkommener Hochachtung: das Comité für die Exhumirung Steiner's.»

Am 17. März wurden im Monbijou-Friedhofe unter dem Beisein des Vertreters der Sanitätspolizei, Herrn Dr. med. *Ost,* und dem Präsidenten des Comités die Reste Steiner's dem Grabe enthoben. Der Schädel des grossen Mathematikers wurde gemessen und seitlich und frontal photographirt und gewiss wird es auch interessiren, eine Abbildung desselben zu besitzen. Herr Prof. Dr. *Th. Studer* berichtet darüber Folgendes:

«Zur Beurtheilung des Schädels *von Steiner* liegt mir nur eine photographische Darstellung vor, welche den Schädel einmal im Profil und einmal in Frontalansicht wiedergibt unter einer Reduktion von unter 0,5.

Die Schädellänge betrug nach einer Messung von Herrn Prof. Dr. *Graf* am Original 185 mm., in der Photographie beträgt sie 82 mm., mit zu Grundelage der deutschen Horizontale gemessen; ob auch am Original die deutsche Horizontale als Grundlage genommen wurde, konnte ich nicht erfahren.

Der Schädel erscheint schön gewölbt und voluminös, die Stirn breit und hoch, die Scheitelwölbung sehr regelmässig, nach dem Hinterhaupt fällt der Schädel steil ab. Auffallend ist, dass die linke Schläfengegend bedeutend mehr aufgetrieben ist, als die rechte, so dass der Schädel dadurch in der Frontalansicht assymmetrisch erscheint. An der geraden Stirn erscheinen die Stirnhöcker vorragend, ebenso der Nasenwulst, die Superciliarbogen sind namentlich am Beginn von

Innen ziemlich stark, dadurch ist die Glabella eingesenkt. Auf ihr ist noch eine Spur der Stirnnaht erhalten, was darauf deutet, dass diese relativ spät verwachsen ist. Die Coronalnaht ist gegen den Scheitel verstrichen, die Lamdanaht ganz verstrichen. Nirgends ist eine Spur von Schaltknochen zu erkennen. Die Linea temporalis ist schwach ausgeprägt. Die Augenhöhlen sind gross, die Nase hoch, die Oberkiefergegend schmal, wahrscheinlich war der Gaumen schmal. Die Indices, welche sich an der Photographie berechnen liessen, sind:

Schädelindex = 82, 9 Brachycephal.

(Nach direkter Messung von Professor Dr. *Graf*, welche aber nicht mit Berücksichtigung der deutschen Horizontale ausgeführt wurde.)

| | | |
|---|---|---|
| 1600 : 185 | = 85,5. | |
| Ohrhöhenindex | = 67. | |
| Gesichtsindex | = 60,7 | Leptoprosop. |
| Orbitalindex | = 82 | Mesoconch. |
| Nasenindex | = 40 | Leptorhin. |

In den allgemeinen Verhältnissen schliesst sich die Schädelform an diejenige der Bevölkerung unseres Mittellandes an, die in weit überwiegender Zahl brachycephal und leptoprosop ist. Der Schädel zeichnet sich durch sein Volum und die abgesehen von der Assymetrie edle Form aus.»

Vom Sarg war keine Spur mehr vorhanden, ein Rest der Cravatte und einige Hemdenknöpfchen wurden noch gefunden. Sämmtliche Skelettheile wurden sorgfältig nach Vorschrift desinfizirt und eingesargt und hierauf, Nachmittags 3 Uhr, unter Begleit einiger Comitémitglieder in der Leichenhalle beim Bremgarten-Friedhofe deponirt. Am 18. März Vormittags 11 Uhr, dem 100jährigen Geburtstag Steiner's, sollten seine sterblichen Reste feierlich der Erde wieder übergeben und zugleich sollte das Grabdenkmal L. Schläfli's eingeweiht werden. An alle Subskribenten wurde vom Comité folgendes Circular versandt:

Steiner-Schläfli-Comité. Bern, den 9. März 1896.

Tit!

«Am 18. März kehrt der 100jährige Gedenktag der Geburt des grossen Mathematikers Jakob Steiner von Utzenstorf wieder. Seine sterblichen Reste sind im Monbijou-Friedhofe in Bern beigesetzt. Auf obigen Tag hat nun das unterfertigte Comité die Exhumation Steiner's und die Wiederbeisetzung seiner sterblichen Reste auf dem Bremgarten-Friedhofe angeordnet. Zugleich wird damit die Uebernahme

des Grabmonumentes des am 20. März vorigen Jahres verstorbenen Prof. Dr. Ludwig Schläfli verbunden. Das nachstehende Programm gibt Ihnen über den Verlauf der Feier Auskunft.

Wir haben nun die Ehre, Sie zu der Feier höflichst einzuladen und rechnen auf Ihre Theilnahme. Mit Hochschätzung Namens des Steiner-Schläfli-Comités, der Präsident: Prof. Dr. J. H. Graf.»

«Programm für die Exhumation der sterblichen Reste Jakob Steiner's und die Einweihung des Schläfli-Denkmals:

17. März, Nachmittags 2 Uhr: Ausgrabung der sterblichen Reste Jakob Steiner's auf dem Monbijou-Friedhofe unter Anwesenheit der Mitglieder des Comités und des Vertreters der Sanitäts- und Polizeibehörde; hernach Deponirung der wieder eingesargten Reste in der Leichenhalle des Bremgarten-Friedhofes.

18. März. Vormittags 11 Uhr: Sammlung der Theilnehmer beim Bremgarten-Friedhofe.

11¼ Uhr: Beisetzung der sterblichen Reste Steiner's in der vom Gemeinderath angewiesenen reservirten und konzessionirten Grabstätte. Ansprache.

12 Uhr: Uebergabe des Grabmonumentes Ludwig Schläfli's auf dem Bremgarten-Friedhofe. Ansprache.

1 Uhr: Sammlung der Theilnehmer zu gemeinschaftlichem Mittagessen im Speisesaal des Hotel Jura beim Bahnhof. (Couvert à Fr. 2.—.)»

Speziell eingeladen wurde der Gemeinderath der Stadt Bern, derselbe hatte auf die Bitte des Comités hin beschlossen den Unterhalt beider Grabstellen zu übernehmen. Das bezügliche Schreiben lautet:

Bern, den 11. März 1896.

*Der Gemeinderath der Stadt Bern* an Herrn Professor Dr. Graf, Bern.

Hochgeehrter Herr!

Der Gemeinderath hat an die Exhumation der sterblichen Reste Jakob Steiner's und Einweihung des Schläfli-Denkmals am 18. März die Herren Stadtpräsident Lindt und Vizepräsident Scherz abgeordnet. Wir möchten Sie bitten, diesem letztern ein Programm der abzuhaltenden Feier zuschicken zu wollen.

Gleichzeitig hat der Gemeinderath verfügt, dass die Grabstätten und Monumente der Mathematiker Steiner und Schläfli von der Gemeinde in Unterhalt übernommen werden, nachdem diese Gräber vom Comité werden in Stand gestellt worden sein. Für das Grab Schläfli

wird zwar in der nächsten Zeit noch die Erbin zu sorgen haben. Später wird dann die Gemeinde dafür eintreten. Mit vollkommener Hochachtung Namens des Gemeinderathes, der Stadtpräsident: Lindt; der Stadtschreiber: Bandelier.»

Der Gemeinderath von Burgdorf (Heimatort Schläfli's) delegirte die Herren H. Bögli, Gymnasiallehrer, und J. F. Stalder, Sekundarlehrer, und vom Gemeinderath Utzenstorf (Geburtsort Steiner's) war folgendes Schreiben eingelaufen:

Utzenstorf, den 17. März 1896.

*An das Tit. Steiner-Schläfli-Comité in Bern.*

Hochgeehrte Herren!

«Sie beehrten uns mit der Einladung zur Theilnahme an der Exhumation der sterblichen Reste unseres Gemeindebürgers, Herrn Professor *Jakob Steiner* sel., und Einweihung des *Schläfli-Denkmals*. Wir verehren die Erinnerung an diese beiden grossen Todten und hätten denselben die ihnen wohlgebührende Ehre, die ihnen am 17. und 18. dies erwiesen wird, mit ganz besonderer Hochachtung zu beweisen gerne mitgeholfen, wenn die Beiwohnung an dieser Feierlichkeit uns möglich wäre. Wir müssen daher zu unserm grossen Bedauern darauf verzichten. Nicht umhin können wir aber, Ihnen, hochgeehrte Herren, die an uns gerichtete Einladung auf's Herzlichste zu verdanken und zeichnen mit besonderer Hochachtung Namens des Gemeinderaths, der Präsident: J. Jb. Fischer; der Sekretär: Kehrli.»

Am 18. März Vormittags 11 Uhr versammelten sich die Vertreter der Behörden, das Comité und eine Anzahl Schüler und Freunde der beiden Gelehrten auf dem Bremgarten-Friedhofe. Der Sarg Steiner's wurde dem Schooss der Mutter Erde übergeben. Hiebei richtete Herr Prof. Dr. C. F. Geiser-Zürich, bekanntlich ein Grossneffe Steiner's, folgende Worte an die Versammlung:

«Am kommenden 1. April werden 33 Jahre verflossen sein, seit Jakob Steiner von uns geschieden ist; ein halbes Menschenalter trennt uns bereits von dem Todestage des grossen Mathematikers. Diejenigen unter uns, die ihn noch gekannt, die seine Schüler gewesen sind oder die sonst in persönlichen Beziehungen zu ihm gestanden haben, fühlen das herannahende Alter, dessen Schnee schon in dichten Flocken auf uns gefallen ist. Wenn nun auch das wissenschaftliche Lebenswerk Steiner's uns immer vor Augen stand, so ist in dieser langen Zeit das Persönliche des Mannes mehr und mehr in den

Hintergrund gerückt. Selbst die Grabstätte schien verschollen, und da der Friedhof, auf welchem er beerdigt war, aufgehoben wurde, so musste man sogar befürchten, dass die Stelle, welche seine sterblichen Reste barg, für immer verloren sei. Glücklicher Weise haben die bernischen Mathematiker sich mit Erfolg darum bemüht, den Gebeinen des berühmten Landsmannes einen bleibenden und unverlierbaren Ruheplatz zu sichern. Und so sei in dieser Stunde vor Allem aus den Behörden der Stadt Bern, welche das neue Grab zur Verfügung gestellt und den würdigen Unterhalt desselben übernommen haben, der herzlichste Dank dargebracht.

Die Ueberführung und definitive Bestattung Steiner's auf dem neuen Kirchhofe ist zugleich mit einer bescheidenen Feier seines hundertjährigen Geburtstages verbunden. Wie natürlich ist es also, dass wir vor dem offenen Grabe, das seine zerfallenden irdischen Ueberreste aufnehmen wird, uns des unzerstörbaren geistigen Erbes erinnern, das er hinterlassen hat. Wir können dasselbe heute sicherer ermessen, als unmittelbar nach seinem Tode und es getrost in dem einen Satze zusammenfassen: dass wir in ihm den grössten Geometer unseres Zeitalters besessen haben, auf dessen Schöpfungen noch künftige Jahrhunderte in Forschung und Lehre weiterbauen werden.

Hesse spricht in dem kurzen Nachrufe, der im 62. Bande des Crelle'schen Journals enthalten ist, von Steiner's «Entdeckungen, die weit über die Grenzen hinausgehen, welche seine Zeitgenossen sich gesteckt haben». Und in der That sind auch heute noch viele dieser Entdeckungen nicht bewiesen und in einen systematischen Zusammenhang gebracht. Immerhin ist die Arbeit der Nachfolger auf den von ihm angebahnten Gebieten nicht ohne Erfolg geblieben und man darf insbesondere hervorheben, dass der von Steiner gestiftete Preis der Berliner-Akademie zu mehrern der interessantesten Untersuchungen der neuern Geometrie Veranlassung gewesen ist. Durch die umfangreichen Arbeiten Cremona's und Sturm's hat die Lehre von den Flächen dritten Grades eine grosse Bereicherung erfahren und namentlich in dem Sturm'schen Buche sind die rein geometrischen Methoden Steiner's mit schönstem Erfolge angewendet. Smith und Kortum haben über die geometrische Behandlung der Gleichungen 3. und 4. Grades und über die Erzeugung der Curven 4. Grades aus projektivischen Büscheln niedrigeren Grades Resultate gefunden, die auch das Vorhandensein imaginärer Elemente gebührend berücksichtigen. In dem schwierigen Gebiete der algebraischen Raumcurven haben Nöther's

exakte Forschungen sichere Ergebnisse zu Tage gefördert. Durch Ernst Kötter ist der Versuch gemacht worden der Lehre von den ebenen algebraischen Curven eine rein geometrische Grundlage zu geben.

Wenn alle diese Untersuchungen und eine grosse Reihe anderer Arbeiten der gegenwärtig auf dem Felde der Geometrie thätigen Forscher vorzugsweise an die spätern Abhandlungen Steiner's anknüpfen, so scheint es doch, dass in dem Gesammturtheil über ihn seine frühern Werke wieder mehr berücksichtigt und gewürdigt werden. Das im Jahre 1833 erschienene kleine Büchlein: «Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises» ist erst vor Kurzem in «Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften» aufgenommen worden. Der nämlichen Sammlung soll auch das aus dem Jahre 1832 stammende Hauptwerk: «Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander» einverleibt werden. Von den nach Steiner's Tode herausgegebenen Vorlesungen erfreut sich der elementare Theil, den er als «Populäre Kegelschnitte» zu bezeichnen pflegte, der fortdauernden Gunst der Mathematiker. Gewiss würde auch eine selbständige Ausgabe der beiden Abhandlungen über «Maximum und Minimum» einen grossen Leserkreis finden.

Diese Schriften, welche gewissermassen auf einem direkten Wege von der Schwelle der Wissenschaft bis zu den Hauptergebnissen derselben führen, gehören durch ihre einfache und natürliche Darstellung, durch ihren so mannigfaltigen und eigenartigen Inhalt zu denjenigen Werken, die man immer und immer wieder mit Genuss und Belehrung, mit Freude und Bewunderung in die Hand nimmt. Man darf sie füglich den Büchern Leonhard Euler's an die Seite stellen, die auf dem freilich weit ausgedehntern Gebiete der Analysis ein volles Jahrhundert hindurch Unterricht und Studium beherrscht und die Forschung in vielseitigster Weise angeregt haben. Und so, wie wir heute unwillkürlich mit Euler's Namen vieles verknüpfen, was die Arbeit seiner Vorgänger und seiner Zeitgenossen gewesen, so erscheint nach und nach auch Steiner als der Repräsentant eines Ideenkreises, der nicht sein alleiniges Eigenthum ist. Gerade diejenigen, welche er selbst in unbefangener und rückhaltloser Anerkennung als die grossen Bahnbrecher der neuen Geometrie bezeichnete, Poncelet und Möbius, auf deren Leistungen er so vielfach fusst, treten schon neben ihm auf eine zweite Stufe zurück; auch unser Lhuilier findet nicht mehr die Würdigung, die seinen scharfsinnigen Arbeiten gebührt.

DEM
GENIALEN MATHEMATIKER
LUDWIG SCHLAFLI
15 JAN 1814 - 20 MAART 1895

In Erinnerung an den 150. Geburtstag Pestalozzi's, den wir vor Kurzem gefeiert haben, lenken wir zum Schlusse unsere Gedanken noch auf die Anregungen, welche der grosse Geometer von dem unsterblichen Pädagogen empfangen hat. Man weiss, dass es zu den Hauptgrundsätzen der Pestalozzi'schen Erziehungskunst gehörte, die geometrische Anschauung schon in den Elementarunterricht einzuführen. Dementsprechend hat sich Steiner bis zu den letzten Lebensjahren bemüht, seine unvergleichliche Lehrbefähigung nicht nur an einer kleinen Zahl Auserwählter im akademischen Hörsaal zu erproben, sondern, wo er das nöthige Interesse fand, manche der von ihm gefundenen Resultate auch solchen zu erklären, die nicht eine eigentliche mathematische Bildung besassen. Und wenn allmählig von den mit elementaren Hülfsmitteln ausgeführten Entwicklungen ein immer grösserer Theil in den Schulunterricht zunächst unserer Realschulen und Gymnasien übergeht, so entspricht das einem von ihm selbst sehr lebhaft gehegten Wunsche. Die auf immer grössere Kreise sich ausdehnende Wirkung seiner Schöpfungen wird auch das Gedächtniss an die neue Ruhestätte, welche ihm heute bereitet ist, weit überdauern und es erfüllt sich das Dichterwort, das so ganz seinen Gesinnungen und Hoffnungen Ausdruck gibt:

Von des Lebens Gütern allen
Ist der Ruhm das Höchste doch;
Wenn der Leib in Staub zerfallen,
Lebt der grosse Name noch.»

Hierauf begab man sich hinüber zum Grabdenkmal Schläfli's. Noch stand es verhüllt in der Frühlingsonne da. Meister Laurenti liess den Schleier fallen, vor uns zeigte sich das Monument, ein stattlicher Grimselfindling von 210 cm. Höhe, in welchen das von Laurenti modellirte und in Bronze gegossene Bildniss Schläfli's (Hochrelief in Medaillonform) eingelassen ist und unter dem Bild, welches uns die markigen Züge des Altmeisters wiedergibt, stehen die Worte eingemeisselt: «Dem genialen Mathematiker Ludwig Schläfli 15. I. 1814 bis 20. III. 1895.»

Dann richtete Prof. Dr. Graf folgende Worte an die Versammlung:

«Es war ein Tag so schön wie heute, als wir vor fast einem Jahr Ludwig Schläfli hier zur ewigen Ruhe gebettet haben. Seine Schüler und Freunde, die treue Pflegerin seiner letzten Lebensjahre, haben es sich nicht nehmen lassen, sein Andenken durch einen Denkstein zu ehren. So versammelt sich denn die kleine Gemeinde seiner Ver-

ehrer wohl zum letzten Mal an diesem Grab, das in seiner Tiefe den geliebten Lehrer und Freund, den grossen Forscher von Weltruf in sich birgt. Der bescheidene Schläfli wäre zwar mit dem einfachsten Grabstein zufrieden gewesen; in seinem Wesen lag es nicht sich vorzudrängen. Wir sind es aber der Wissenschaft schuldig das Andenken der grossen Geister unserer Nation zu ehren und dasselbe würdig zu feiern. Die Stadtgemeinde Bern hat denn auch in richtiger Würdigung der eminenten Bedeutung des Dahingeschiedenen sein Grab auf Jahre hinaus gesichert und will es, wie dasjenige seines congenialen ältern Freundes, in sichere Obhut nehmen. Herzlichen Dank allen, die zum Gelingen beigetragen haben, herzlichen Dank dem Meister, der sein Bild mit künstlerischer Hand geformt, aufrichtiger und warmer Dank sei den Behörden der Stadt Bern im Namen des Comités und im Namen aller Schüler, im Namen der Freunde der Wissenschaft dargebracht. Steiner und Schläfli gehören zusammen. Sie entstammten der nämlichen heimathlichen Scholle, dem Thal der Emme; beide haben sich durch Mühe, Arbeit und Entbehrungen kraft ihres Genies auf eine hohe wissenschaftliche Stufe hinaufgearbeitet, die unsere Bewunderung erregt; beide waren Zeitlebens vom heiligen Feuer der Liebe zu den Wissenschaften durchglüht; beide ruhen nun auch gemeinsam am nämlichen Ort des Friedens: Steiner, der grosse Geometer, der geniale Entdecker und Schöpfer der synthetischen Geometrie. Schläfli, der souveräne Beherrscher des Calcüls und der Analytik. Freude unserm Lande, dass es zwei solche Geistesheroen hervorgebracht hat! Beider Grabstätte ist nun der nämlichen treuen Obhut unterstellt. Ob Geschlechter kommen oder vergehen, dess sind wir gewiss, so lange in Bern die Wissenschaften eine heimische Stätte finden, so lange wird es auch seine grossen Todten in Ehren halten. Im Namen des Comités, im Namen aller Schüler und Freunde übergebe ich hiemit das Grab und das Grabmonument der Obhut der Gemeinde Bern.»

Herr Stadtpräsident *Lindt* dankte hierauf dem Comité und den anwesenden Freunden für die pietätvolle Weise, wie für das Andenken der beiden grossen Männer gesagt worden sei, und übernahm feierlich im Namen der Stadt Bern die Obhut über die beiden Gräber dieser grossen Gelehrten.

Die Theilnehmer vereinigten sich nach der Feier im Hotel Jura zu einem einfachen Mittagessen, wo der Präsident des Comités Kenntniss gab von folgenden eingelaufenen Schreiben und Telegrammen.

Prof. Dr. *H. A. Schwarz*-Berlin telegraphirte: «Den Ehrungen, «welche dem Andenken an die hochverdienten Mathematiker Jakob «Steiner und Ludwig Schläfli gelten, schliesst sich in dankbarer Er- «innerung an H. A. Schwarz».

*L. Cremona*-Rom: «Col cuore assisto onoranze sommi matematici Steiner Schläfli.»

*Beltrami*-Rom: «Vous prie manifester mes sentiments vive participation cérémonie d'aujourd'hui.»

*Brioschi* Mailand: «Prego rappresentarmi solenne fungioni domani onore grandi scienziati.»

*F. A. Forel*-Morges. Präs. des Centralcomités der schweiz. Naturf. Gesellschaft: «Excusez mon absence et croyez à ma sympathie pour la solennelle cérémonie Steiner Schläfli.»

*F. Rudio*-Zürich: «Den zur Ehrung von Steiner und Schläfli versammelten Fachgenossen entbietet kollegialischen Gruss.»

*Moritz Cantor* schrieb: «Verbindlichen Dank für die Einladung zur Feier vom 18. März. Das überall den Eisenbahnverkehr störende Nachwirken der jüngsten schrecklichen Hochwasser gestattet mir nicht an die Reise nach Bern zu denken, so sehr ich mich freuen würde, Sie einmal persönlich kennen zu lernen etc.»

*H. G. Zeuthen*-Kopenhagen: «Empfangen Sie als Präsident des Steiner-Schläfli-Comités meinen besten Dank für die Einladung zur vorstehenden Feier. Kann ich auch nicht persönlich anwesend sein, dürfen Sie doch an meine geistige Theilnahme an der Ehre, welche Sie Ihren grossen Landsmännern zeigen, sichere Rechnung machen. Seit sehr lange war ich von den genialen Arbeiten Steiner's stark angezogen: er ist ja einer der grössten Führer der mathematischen Richtung, die mir immer am liebsten war. Und zur selben Zeit, wie ich Arbeiten von Schläfli bewundert habe, ist es mir sehr lieb gewesen auch seine nähere Bekanntschaft zu machen. Uebrigens ist es ja ganz überflüssig, solche persönliche Motive zu nennen, hier wo es nur gilt die Gefühle *aller* Mathematiker zu theilen.»

*Hugo Schiff*-Florenz schrieb: «Wo zwei oder drei im Namen des heiligen Geistes zusammen sind, da wird er unter ihnen sein.» Dass aber auch ich Unheiliger *nur im Geiste* unter den Berner Freunden sein kann, welche sich heute im Namen Schläfli's und zu seiner Ehrung versammeln, das habe ich auf's Schmerzlichste zu bedauern; denn 40jährige Erinnerungen knüpfen sich für mich an Schläfli und an die Berner Hochschule. — Als ich im Sommer 1857

in Bern ankam, um mich daselbst als Docent zu habilitiren, war gleich am ersten Tage Valentin meine erste, Schläfli meine zweite Bekanntschaft. Mit Beiden bin ich bis an ihr Lebensende in engster Beziehung geblieben und sie haben mein Interesse wach erhalten für Alles, was sich in Bern in Personen und Dingen wissenschaftlich Interessantes ereignete. Um zur Ehrung unseres dahingegangenen theuren Freundes beizutragen, was in meinen schwachen Kräften stand, bin ich Mitglied des Comités geworden. Als Comitémitglied und als 40jähriger Freund Schläfli's, sende ich allen Versammelten, allen, die zur Ehrung unseres Freundes beigetragen, sowie der Gefährtin, welche ihm 20 Jahre lang das Leben erleichtert und verschönert hat, die herzlichsten Grüsse und meinen tiefgefühlten Dank. — Ein schallendes Hoch auf die Wissenschaft, der wir alle dienen, und auf das Andenken der vor uns dahingegangenen Jünger, welche sich ihr, wie unsere Freunde *Schläfli* und *Valentin*, so treu, so ganz, so rückhaltslos, so aufopfernd hingegeben haben.»

Dr. *Julius Gysel*, Direktor des Gymnasiums in Schaffhausen: «Die Schrift über Schläfli habe ich erhalten . . . Ich brauche wohl nicht zu versichern, dass ich sie in einem Zuge gelesen und sie in mir alte und neue Erinnerungen wieder recht lebhaft wach gerufen hat. Es ist mir desshalb auch höchst fatal, dass ich nächsten Mittwoch nicht zur Steiner-Schläfli-Feier kommen kann. Verschiedene Umstände machen es mir unmöglich, doch im Geiste werde ich gewiss dabei sein und wünsche Euch von Herzen bestes Gelingen.»

*H. Amstein*-Lausanne: «Da ich tief in Examen stecke, die sich nicht verschieben lassen, so ist es mir zu meinem tiefen Bedauern unmöglich, nächsten Mittwoch an der bezeichneten Feier Theil zu nehmen, an der ich schon deswegen gerne Theil genommen hätte, weil sie mir Gelegenheit geboten hätte, Sie und wohl noch andere Berufsfreunde zu sehen und zu sprechen.»

Von Winterthur langte folgendes Telegramm ein (wahrscheinlich von Herrn Dr. U. Aeschlimann):

Mutz toastirt:

«Ich kriege das volle Glas zur Hand und sage:
Alles nach seiner Art!
Aber ist Einer im ganzen Land
Der unserm Jakob Steiner gleicht,
Der diesem Berner das Wasser reicht!
Sein Andenken lebe hoch!»

*Rechnungsstellung:* An der Subskription betheiligten sich:

Die HH. J. G. Hess, Abtheilungschef in Bern, Dr. H. Meyer-St. Gallen, Dr. R. Wetli-Basel, Prof. Dr. Von der Mühll-Basel, Prof. Dr. E. Ott-Bern, M. Zwicky-Bern, Prof. Dr. Jonquière-Bern, Dr. G. Jonquière-Bern, Dir. Vollenweider-Burgdorf, Dr. med. G. Beck-Bern, Dr. U. Aeschlimann-Winterthur, Prof. M. Lacombe-Zürich, Prof. Riemenschneider-Neuenstadt, Privatdocent J. Fehr-Genf, Direktor A. Pfenninger-Küssnacht-Zürich, Prof. Dr. A. Meyer-Zürich, Prof. Dr. L. Fischer-Bern, Dr. A. Kiefer-Zürich, A. Droz-Farny-Pruntrut, Prof. C. Cailler-Genf, Dr. J. Gysel und Prof. Imhof in Schaffhausen, Dr. J. Wetterwald-Basel, Dr. C. Wagner-Zürich, Prof. Dr. L. Stein-Bern, Prof. Dr. Hagenbach-Bischoff-Basel, Prof. Franel und Prof. Dr. Hurwitz in Zürich, Dr. G. Stiner-Frauenfeld, Nat.-Rath Forrer-Winterthur, Dr. L. Crelier-St. Imier, Prof. Dr. Sidler und Dr. Ch. Moser in Bern, Dr. F. Büzberger-Burgdorf, Prof. Dr. C. F. Geiser-Küssnacht-Zürich, Prof. Dr. F. Burckhardt und Prof. Dr. Kinkelin in Basel, Prof. Dr. A. Baltzer-Bern, Prof. Dr. Affolter und Prof. Dr. Rudio in Zürich, Inspektor Schwab-Twann, Prof. Dr. v. Kostanecki und Prof. Dr. Th. Studer in Bern, Privatdocent Dr. Gubler und Prof. Dr. W. Fiedler in Zürich, Privatdocent Dr. Gruner, Prof. Dr. A. Rossel, Prof. Dr. G. Huber, Prof. Dr. J. H. Graf, alle in Bern, Prof. Pietro Blaserna-Rom, Antonio Favaro, Giuseppe Veronese, Ernesto Padova, alle in Padova, Enrico d'Ovidio, Corrado Segre, Luigi Bezzolari, Nicodemo Jadanza, Dr. Angelo Ramorino, alle in Torino, Eugenio Bertini, Luigi Bianchi, Senat. Ulisse Dini, Cesare Finzi, alle in Pisa, und Prof. Dr. Hugo Schiff-Florenz, der überdies die Sammlung in Italien besorgte. Im Ganzen wurden Fr. 846. 80 subskribirt; die Erbin Schläfli's, Fräul. Marg. Spichlin, übernahm weitere Fr. 680.—, so dass die Einnahmen betragen 1526 Fr. 80 Cts. Die Ausgaben belaufen sich auf 1557 Fr. 45 Cts., so dass ein kleines Defizit resultirte, welches aber gedeckt wurde.

Die Rechnung wurde im Detail mit allen Belegen durch die in Bern wohnenden Mitglieder des Comités, nämlich die Herren Prof. Sidler, Prof. Huber, Prof. Ott und Dr. Moser geprüft, mit den Belegen verglichen und richtig befunden.

Die beiden Grabkonzessionen, sowie die Rechnung, wie alle Belege und sonstige auf die Feier bezughabende Dokumente sind auf der schweizer. Landesbibliothek in Bern deponirt.

Hiermit ist unser Bericht zu Ende. Es erübrigt uns nur noch, den Behörden der betheiligten Gemeinden, vorab denen der Stadt

Bern, sowie allen Freunden und Fachgenossen, nicht minder den verehrten Comitémitgliedern, welche uns in der Durchführung der übernommenen Doppelaufgabe mit Rath und That unterstützt haben, den verbindlichsten Dank auszusprechen. Durch das freundliche Entgegenkommen der bernischen naturforschenden Gesellschaft ist es uns möglich geworden, diesen Bericht mit dem Portrait Steiner's, Ansichten seines interessanten Schädels und einem Bild des Schläfli'schen Grabdenkmals auszustatten, Beilagen, welche sämmtlich unser grosses Interesse in Anspruch nehmen.

Bern, im Febr. 1897.

P. Gruner.

# Die neuern Ansichten über Materie und Energie.

(Gehalten in der Naturforschenden Gesellschaft in Bern am 6. März 1897.)

Im Jahre 1895 hat Prof. *Ostwald* von Leipzig an der deutschen Naturforscherversammlung in Lübeck in seinem öffentlichen Vortrage über «die Ueberwindung des wissenschaftlichen Materialismus» eine neue Weltanschauung, die «energetische», verkündet. Dieselbe soll eine neue, bessere Grundlage für die exakten Naturwissenschaften liefern als die bisherige mechanistische Weltanschauung.

Es soll hier in Kürze eine Vergleichung dieser beiden Anschauungen gemacht werden. —

Vorerst muss festgehalten werden, dass unser ganzes Wissen von der Aussenwelt lediglich aus unsern in Raum und Zeit gesonderten Sinneseindrücken besteht. Vom ersten Momente an, da unser Bewusstsein erwacht, wird es von einer ununterbrochenen Folge von Sinneseindrücken bestürmt. Wir sehen, fühlen, hören stets etwas, und alle diese Eindrücke erscheinen uns entweder räumlich getrennt oder zeitlich aufeinanderfolgend. Die Gesammtheit dieser Eindrücke ist es, die wir die Aussenwelt unseres «Ichs» nennen. — Die Existenz dieser Eindrücke ist unleugbare Thatsache; hingegen wissen wir durchaus nicht, was deren Ursache ist — wir können uns darüber nur subjektive Meinungen bilden.

Immerhin drängen sich jedermann (ganz unbewusst) gewisse Ansichten auf, die allgemeine Anerkennung finden, nämlich die Ansicht, dass allen Sinneseindrücken eine zweifache Ursache zu Grunde liege: die Materie und die Kraft.

Aber, genau besehen, sind das zwei Begriffe, die nur bestimmte Eigenschaften unseres Tastgefühles bezeichnen.

Weil unser Tastgefühl sehr oft Eindrücke eines mehr oder weniger starken Widerstandes erfährt, z. B. beim Betasten oder Stossen von Gegenständen, so sucht unser Verstand unwillkürlich nach einer objektiven Ursache dieses Widerstandsgefühls und nennt sie «Materie».

Da ferner im Lauf der Zeit das Gefühl eines solchen Widerstandes an wechselnden Raumstellen empfunden wird, so bekommt unser Bewusstsein den Eindruck, als ob diese «Materie» sich bewegte.

Die Wahrnehmung von Bewegungen im Bunde mit dem Gefühl von widerstandleistenden Raumtheilen führt zu der allgemein angenommenen Ansicht, als ob die Aussenwelt unseres «Ichs» ein grosser, leerer Raum wäre, in welchem sich ein eigenthümliches Ding, die Materie, bald ruhend, bald in Bewegung, befinde.

Die Bewegung ergibt den zweiten vorhin erwähnten Begriff, denjenigen der «Kraft». Unsere Muskeln sind im Stande, irgend welche Gegenstände in Bewegung zu bringen und das Gefühl, das wir bei Reizung unserer Muskeln empfinden, nennen wir Kraft. Die Muskelkraft gilt uns als Ursache der von uns hervorgebrachten Bewegungen. Unwillkürlich denkt man sich bei jeder Bewegung eine analoge Ursache, die man desshalb auch wieder als objektiv existirend betrachtet, und welche man «Kraft» nennt.

Solche Ueberlegungen zeigen deutlich, dass die Begriffe Kraft und Materie eigentlich nur Abstraktionen aus unsern Sinneseindrücken sind und keineswegs unmittelbare, empirische Thatsachen bedeuten.

Trotzdem hat die moderne Naturforschung sich an die landläufige, oberflächliche Anschauung von der objektiven Existenz von Materie und Kraft gehalten und hat neben Raum und Zeit (den Grundbegriffen unserer Vorstellungskraft) noch Materie und Kraft als Grundlagen der Natur hingestellt.

Die Messung von Materie und Kraft hat zunächst zum Begriff der Masse geführt (die leider in Folge dessen unzertrennlich mit dem Materienbegriff verknüpft erscheint, während doch die Masse ein rein physikalischer, die Materie hingegen ein bloss metaphysischer Begriff ist) und dann zur Definition der Kraft als Masse mal Beschleunigung (auch in dieser rein mathematischen Beziehung glaubte man eine thatsächliche Relation zu finden).

Auf diesen Grundlagen, nämlich: auf den Begriffen des Raumes

und der Zeit, auf den rein mathematischen Bewegungsgesetzen, auf dem hergeleiteten Massenbegriff und auf der Definition des Kraftbegriffes, beruht die ganze moderne Mechanik, das vollkommenste System der Naturwissenschaften.

Unter den zahlreichen Principien der Mechanik (von Newton, Lagrange, Hamilton etc.) ist auch eines, das an Bedeutung immer mehr zunimmt, es ist das Princip der Erhaltung der Energie.

Die «Energie» ist in der heutigen Mechanik ein bloss abgeleiteter, sekundärer Begriff, der durch eine zweifache Definition scharf bestimmt ist.

In der Mechanik ist die Energie das Produkt einer Kraft in den von ihr durchlaufenen Weg, oder das Produkt einer Masse in das halbe Quadrat ihrer Geschwindigkeit. — Von dieser Grösse lehrt uns die Mechanik, dass in einem sog. konservativen Punktsystem die Gesammtsumme konstant sei; das ist der Inhalt des Princips der Erhaltung der Energie. —

Aber die sichtbaren mechanischen Erscheinungen umfassen nicht die Gesammtheit der Natur. Wir gewahren nicht nur eigenschaftslose Massen, die sich im Raume bewegen, sondern die sog. Materie weist noch mannigfache Eigenschaften auf: sie hat Farben, sie hat gewisse Temperaturen, sie kann elektrisirt werden, sie kann chemische Umwandlungen erfahren u. s. w. Ausser den gewöhnlichen Bewegungen weist die Natur noch Licht-, Wärme-, Elektricitäts-, chemische und auch Lebenserscheinungen auf. Dieselben hängen nur in einem Punkte untereinander zusammen. Sie sind alle in einander überführbar, und diese Ueberführung ist nicht eine schwankende, sondern erfolgt nach ganz festen Verhältnisszahlen. Und diese Zahlen ergeben sich aus dem Energiebegriff. Jede Naturerscheinung kann in mechanische Arbeit oder in Energie umgewandelt werden und es hat sich gezeigt, dass bei solchen Umwandlungen immer die Energie konstant bleibt.

Damit ist ein Bindeglied zwischen der Mechanik und allen andern Gebieten der Naturwissenschaft hergestellt und es liegt nahe, überhaupt die Mechanik als Grundlage derselben zu betrachten, d. h. alle Naturerscheinungen durch mechanische, durch Bewegungserscheinungen zu erklären.

Darin besteht die sog. mechanistische Weltanschauung. Sie nimmt an, dass in lezter Linie alles Geschehen im Universum Bewegung sei und dass das Ziel der gesammten Naturwissenschaften dahin gehe,

alle Erscheinungen sowohl der todten als der lebenden Welt auf mechanische Bewegungen zurückzuführen, sie durch ein System von mathematischen, mechanischen Formeln darzustellen.

Wie diese Anschauung unbesehen die Begriffe der Materie und Kraft annimmt, haben wir besprochen. Es ist noch zu zeigen, wie sie zur Aufstellung von zwei weitern Hypothesen: der Atom- und der Aethertheorie hat führen müssen.

Wenn alles Weltgeschehen Bewegung ist, so muss es auch verborgene Bewegungen geben. Ein Körper kann Wärme oder Elektricität haben, ohne dass er desshalb in einem sichtbaren Bewegungszustande ist. Die Wärmebewegung, die Elektricitätsbewegung, die Lichtbewegung u. s. w. kann somit nur in unmerklich kleinen Bewegungen bestehen, und damit solche z. B. in einem festen Körper entstehen können, muss die Materie aus getrennten, winzigen Theilchen, Atomen oder Molekülen, zusammengesetzt sein.

Auch die Chemie führt zu ähnlichen Schlüssen. Die Elemente treten nur in ganz bestimmten Gewichtsverhältnissen zu Verbindungen zusammen. Wenn die Materie aber eine kontinuirliche Masse wäre, so wäre nicht wohl einzusehen, wieso eine gegenseitige Durchdringung zweier elementarer Materien nur in festen Gewichtsverhältnissen stattfinden könnte. Diese Schwierigkeit fällt ganz dahin durch die Annahme der Existenz von kleinen Elementarbestandtheilen. Wie sich daraus alle chemischen und physikalischen Erscheinungen erklären lassen, ist zur Genüge bekannt. — Aber aus diesen Betrachtungen geht deutlich hervor, dass die Existenz der Atome eine durchaus hypothetische ist; die Atomtheorie ist nichts anderes als eine ausserordentlich bequeme und unserm Verständniss zusagende Anschauungsweise.

Ebenso verhält es sich mit der Aethertheorie. Es ist festgestellt, dass Licht-, Wärme- und Elektricitäts-Strahlen ohne Vermittlung der sog. Materie im Raume sich fortpflanzen und zwar mit messbarer Geschwindigkeit. Man mag über die Fernewirkung denken, wie man will, so kann man sich doch nie eine Fernewirkung denken, die anders als unendlich schnell von Punkt zu Punkt wirkt. Weil das nicht der Fall ist, muss man sich einen Träger dieser Bewegungen denken, ein Ding, das keine Materie ist und doch Aehnlichkeit damit hat, man nennt es «Aether».

Wenn auch zahllose, ja fast alle physikalischen und chemischen Erscheinungen sich der Atom- und der Aethertheorie einfügen lassen, so wird dadurch ihr hypothetischer Charakter nicht geändert. Atome

und Aether sind wohl die Grundlagen unserer heutigen Naturauffassung, nicht aber der thatsächlichen Naturerkenntniss.

So umfasst denn die mechanistische Weltanschauung ein grossartiges System von wirklichen Erfahrungsthatsachen, die vielfach durch mathematische Theorien verknüpft sind. Aber die Grundlage, die diesem System gegeben wird, ist eine künstlich hineingelegte. Alle Naturerscheinungen werden so zurechtgestutzt, dass sie durch Bewegungszustände erklärt werden sollen. Um dieses Ziel erreichen zu können, muss man 2 grosse Abstraktionen, die Aufstellung der Begriffe der Materie, als Träger der Bewegung, und der Kraft, als Ursache der Bewegung, machen. Und die weitern Konsequenzen führen zu 2 weitern Hypothesen, zur Atom- und Aetherhypothese.

Die obigen Ausführungen sollen keineswegs den Nutzen und die Berechtigung solcher Hypothesen beanstanden. — Hingegen scheint es doch, als ob mit vollem Recht Einspruch erhoben werden sollte gegen die willkürliche Annahme, dass alles Weltgeschehen aus Bewegung bestehen müsse. Das ist im Grunde nur eine philosophische Spekulation, keineswegs ein Resultat der modernen Naturforschung. In diesem Punkt darf desshalb die mechanistische Weltanschauung angefochten werden, und dies thut denn auch die neue Energetik.

Indem wir uns nun zur Betrachtung dieser neuen Anschauungsweise wenden, dürfen wir nicht erwarten, dass dieselbe vollständig hypothesenfrei sein werde; das kann überhaupt keine allgemeine Theorie.

Aber anstatt der 4 hypothetischen Grundbegriffe von Materie, Kraft, Atom und Aether, wird ein einziger Universalbegriff, die Energie, hingestellt, und ein einziges Universalgesetz, das Princip der Erhaltung der Energie.

Dass die Energie und das Energieprincip weitaus allgemeiner als die Materie und das Gesetz der Erhaltung des Stoffes sind, ist nicht schwer einzusehen. Denn die Materie spielt überhaupt nur in den Gebieten der Mechanik, Akustik, Wärmelehre und Chemie eine wesentliche Rolle; zur Erklärung der optischen und elektrischen Erscheinungen muss ein neues, der Aether, erfunden werden. Die Atome wiederum haben nur für gewisse materielle Erscheinungen Bedeutung; der Kraftbegriff ist sogar nur eine subjektive Definition.

Die Energie hingegen ist sämmtlichen Naturerscheinungen gemeinsam; sie ist sogar das einzige gemeinsame, ja sie ist auch das einzig thatsächliche bei allen unsern Sinneseindrücken und das Energie-

princip ist das einzige überall unzweifelhaft geltende Naturgesetz. Sogar im praktischen Leben kommt es in letzter Linie nur auf Energie an. Bei Nahrungsmitteln kommt es nur auf die dem menschlichen Leibe zugeführte Energie an; chemische Verbindungen haben nur in Folge ihrer Erzeugung oder Aufspeicherung von Energie Nutzen für uns. Die Farbe eines Körpers beruht in der Art der von ihm zurückgeworfenen Leuchtenergie. Licht, Wärme, Elektricität, Schall sind Energieformen, die auf unsere Sinne wirken. Die Bewegungen der Körper (sofern sie nicht rein mathematische Gesetze angeben) haben nur nach dem Grade ihrer Energie Bedeutung. Das Gewicht eines Körpers ist nur ein Mass seiner potentiellen Energie; die Trägheit der Materie ist nichts anderes als der Ausdruck des Princips der Erhaltung seiner Energie; die Undurchdringlichkeit der Körper ist auch nur die bei Stoss oder Kompression auftretende Energie. — So einfach dies scheint, so leicht wird doch ein sehr gewichtig scheinender Einwand gemacht, nämlich: dass die Energie nicht ohne einen Träger existiren könne, also nicht ohne Materie oder Aether. Der Einwand widerlegt sich von selbst. Wenn die Energie alle uns wahrnehmbaren Eigenschaften eines Körpers besitzt, und die Materie nur ein ganz eigenschaftsloser Träger der Energie sein soll, so sieht man nicht recht ein, warum die Existenz der Energie nicht genügend sein sollte, und wesshalb noch ein ganz räthselhafter und unbekannter Träger ihr untergeschoben werden müsste. — Bekannt ist das drastische Beispiel von Ostwald, wo er hervorhebt, dass man bei einem Schlag mit einem Stock doch niemals den Stock selber, sondern nur seine Energie fühle.

Diese Allgemeinheit der Energie ist es hauptsächlich, worauf die Energetik sich stützt. Selbstverständlich ist dieselbe noch viel zu jung und zu neu, als dass sie in einem ausgearbeiteten Systeme vorgeführt werden könnte; desshalb ist sie auch aller und jeder Kritik wehrlos ausgesetzt und kann vorläufig keine andere Waffe in das Feld führen als ihre dem ganz unbefangenen Beurtheiler einleuchtende Einfachheit. — Auch ist die Energetik gegenwärtig noch ein Versuchsfeld für alle möglichen Tendenzen: Hier soll nur in Kürze der Richtung gedacht werden, wie sie von *Ostwald* vertreten wird.

Wir fragen zunächst:

Was ist diese Energie? — Sie ist nichts anderes, als das allen Naturerscheinungen gemeinsam zu Grunde liegende: das unbekannte Ding, das immer in andern Formen uns erscheint, und doch in un-

veränderlicher Gesammtsumme unzerstörbar bleibt (eine genauere, physikalische Definition folgt später). — Ihr erstes und wichtigstes Gesetz ist also das sog. Energieprincip, das deren Unzerstörbarkeit feststellt. Weitere Gesetze müssen sich aus der Art der Uebergänge von einer Energieform in eine andere ergeben. Das führt zu einer fundamentalen Methode der Energetik, zur Zerlegung in Faktoren. Wie dies zu verstehen ist, werden folgende Beispiele zeigen: Wenn Wärme von einem Körper auf einen andern benachbarten übergehen soll, so findet das nur statt, wenn die beiden Körper verschiedene Temperaturen besitzen — die vorhandene Wärmemenge, also die Quantität Energie, hat dabei keinen Einfluss; denn sobald Temperaturgleichheit herrscht, hört der Wärmeübergang auf. Oder, wenn eine grosse und eine kleine Kugel sich berühren und sich mit gleicher Geschwindigkeit in gleicher Richtung fortbewegen, so haben die beiden ganz verschiedene lebendige Kräfte und doch findet kein Ausgleich statt. Ein solcher tritt aber sofort ein, wenn eine Aenderung in der Geschwindigkeit der Kugeln erfolgt. Ebenso sind oft ganz verschiedene Elektricitätsmengen auf 2 leitend verbundenen Kugeln im Gleichgewicht, so lange keine Potentialdifferenz besteht.

So zeigen sich überall gewisse Faktoren der Energie, wie die Temperatur, die Geschwindigkeit, das Potential, von denen allein der Grad des Ueberganges von Energie bestimmt wird, und welche demnach «Intensität der Energie» genannt werden.

Sondert man im Energiebegriff einen Faktor, die Intensisät, ab, so gibt der übrigbleibende Faktor die Fähigkeit an, solche Intensität aufzuspeichern, und wird desshalb «Capacität» genannt.

Es mag hier die Tabelle von Ostwald angeführt sein:

| Energie. | Capacität. | Intensität. |
|---|---|---|
| A. Bewegungsenergie (kinetische). | { Masse. { $\frac{1}{2}$ Bewegungsgrösse. | $\frac{1}{2}$ Geschwindigkeitsquadrat. Geschwindigkeit. |
| B. Raumenergie (potentielle). | | |
| a) Distanzenergie. | Strecke. | Kraft. |
| b) Flächenenergie. | Fläche. | Flächenspannung. |
| c) Volumenergie. | Volum. | Druck. |
| C. Wärmeenergie. | Wärmecapacität. | Temperatur. |
| D. Elektrische Energie. | Elektricitätsmenge. | Potential. |
| E. Magnetische Energie. | Magnetische Menge. | Magnetisches Potential. |
| F. Chemische Energie. | Verbindungsgewicht. | Affinität. |
| G. Strahlende Energie. | Absorption resp. Emission. | Intensität der Strahlung. |

Diese Zerlegungen sind in der Weise gemacht, dass jeweilen die Grösse, welche ein Mass des Energieüberganges liefert, bestimmt und als Intensität bezeichnet wurde. Der übrigbleibende Faktor ergibt die Capacität.

Diese Zerlegung erlaubt es, die Gesammtheit der Naturprocesse von einem überaus praktischen und einfachen Standpunkte aus zu übersehen. — Dabei muss nur vor einer Gefahr gewarnt werden, vor der Gefahr, den Capacitätsgrössen die alt gewohnten Begriffe unterzuschieben und so der alten mechanistischen Anschauung auch in der Energetik Eingang zu verschaffen.

Das darf nicht sein; die Capacitätsgrössen müssen lediglich als Faktoren der Energie angesehen werden, ohne dass ihnen eine reelle Existenz zugeschrieben werden dürfte. — Dies gilt namentlich für den Begriff der Masse, dem hier keine Realität zugesprochen wird, sondern der nur als sekundärer Faktor aus der Bewegungsenergie abgeleitet ist.

Das wird deutlich hervorgehen, wenn wir uns ein Bild von der Aussenwelt auf energetischer Grundlage zu machen suchen (was natürlich gegenwärtig nur in sehr oberflächlicher Weise geschehen kann).

Wir denken uns als Ursache unserer Sinneseindrücke Energieformen, die räumlich getrennt erscheinen und die im Laufe der Zeit ihre räumliche Lage ändern und auch ihre Erscheinungsform stets wechseln, wobei aber die Gesammtsumme der Energie konstant bleibt.

Diese Energie ist entweder an mehr oder weniger scharf abbegrenzte Raumtheile (Körper) gebunden, oder sie ist in steter Bewegung begriffen und zwar mit ausserordentlicher Geschwindigkeit. — Die letztere Art ist die Strahlungsenergie, die als Licht- oder Wärme- oder elektrische Strahlen den Weltenraum durchsetzt, bis sie von gewissen Raumkörpern aufgefangen und in Wärmeenergie verwandelt wird (das ist die Eigenschaft der Absorption).

Die an Raumkörper gebundene Energie kommt meist in verschiedenen Formen gleichzeitig vor, meist als Wärmeenergie, als chemische Energie, als Volumenergie und als Raumenergie, wobei noch die Eigenschaft mit verbunden ist, auf auffallende Strahlungsenergie zu reagiren (d. h. sie zu reflektiren, zu brechen und zu absorbiren). Vorübergehend kann auch magnetische oder elektrische Energie an einer solchen Raumform auftreten. Ferner können diese Energien ineinander sich umformen, wobei dann meist ein Quantum

als strahlende Energie den Körper verlässt. Endlich kann insbesondere die Volumenergie (deren Intensität einfach die alte Eigenschaft der Undurchdringlichkeit der Materie darstellt) sich (meist auf Kosten der Wärmeenergie) wesentlich umformen, so dass die andern Energien sich im Raume verschieben; darauf beruhen die Unterschiede von festen, flüssigen und gasförmigen Körpern.

Von Wichtigkeit ist namentlich die Raumenergie. Für unsere irdischen Körper stellt sie nichts anderes als die Energie der Schwerkraft dar, im Weltenraum aber die Energie der Gravitation; in elektrischen und magnetischen Feldern kann endlich die Raumenergie auch mit der elektrischen oder magnetischen in Wechselwirkung treten. Aber abgesehen hievon bedeutet sie nichts anderes, als dass auf unserer Erde ein höher gelegener Körper mehr Energie besitzt, als ein tiefer gelegener.

Eine Aenderung der Raumenergie bedeutet desshalb stets Bewegung, und die verschwundene Raumenergie kommt in einer andern Form wieder zum Vorschein, als Bewegungsenergie.

Raumenergie und Bewegungsenergie sind also in einfacher Wechselwirkung, und diese Wechselwirkung bildet das Gebiet der Mechanik.

Die experimentellen Untersuchungen derselben zeigen nun, dass die charakteristische Grösse der Bewegungsenergie, ihre Intensität, das Quadrat der Geschwindigkeit ist. Der andere Faktor ist dann ein blosser Hülfsbegriff, «Masse» genannt. — Allerdings zeigt dann die weitere Untersuchung dieses Hülfsbegriffes, dass er ausserordentlich wichtige Eigenschaften hat, namentlich folgende 3: Die Masse besitzt die Eigenschaft der Unzerstörbarkeit, ferner ist sie stets proportional dem bewegten Volumen, endlich ist sie vielen andern Capacitätsfaktoren proportional ,z. B. ist die Wärmecapicität = Masse mal specifische Wärme, die chemische Capacität = Masse mal Aequivalenzzahl u. s. w. Es ist begreiflich, dass man desshalb auf den Gedanken verfallen ist, der Masse als Materie eine objektive Realität zuzuschreiben; dabei sind dann die der Masse proportionalen Capacitätsfaktoren als Grundeigenschaften der Materie (wie Gewicht, Undurchdringlichkeit etc.) bezeichnet worden, die nicht proportionalen hingegen als vorübergehende Zustände derselben (wie Geschwindigkeit, Temperatur, Potential etc.). — Damit ist wohl zur Genüge gezeigt, wie man den Massenbegriff in der Energetik aufzufassen hat. Es wären nun noch eine Reihe von Sätzen anzuführen, welche angeben, in welcher Weise die ver-

schiedenen Energiegrössen sich umformen und verändern. Da aber hierüber noch kein abschliessendes Resultat erreicht ist, so treten wir nicht darauf ein.

Hingegen gestatten die bisherigen Auseinandersetzungen etwa folgende Bilanz zu ziehen:

Die mechanistische Weltanschauung knüpft unmittelbar an Ideen an, wie sie sich unserm Verstand unwillkürlich aufdrängen: an Materie und Kraft. Sie gibt auf dieser Grundlage das denkbar anschaulichste Bild aller Naturerscheinungen, indem sie dieselben auf Bewegung von endlichen Massen oder von getrennt bestehenden Atomen zurückführt. Zudem beruht diese Anschauung auf seit Jahrhunderten in ihrem Sinne ausgeführten Forschungen und hat desshalb eine Fülle von Thatsachen hinter sich, die sich nicht ohne Weiteres auf einer neuen Grundlage umformen lassen.

Alles das fehlt der Energetik vollständig. Die Energie ist bisher meist nur als ein mathematischer Ausdruck, als ein rein geistiger Begriff, aufgefasst worden. Selbstverständlich wird es jedermann ausserordentlich schwer, sich ein Weltbild zu machen, in dem nur Energie vorkommt. Ferner ist die Energetik ganz neu und hat noch keine Resultate aufzuweisen.

Aber das alles sind keine stichhaltigen Gründe, um zu entscheiden, welche Theorie der Wahrheit am nächsten stehe. Hingegen spricht die Thatsache, dass die Energetik sich möglichst genau, ohne Hypothesen und Hülfsbegriffe und Bilder und Abstraktionen, den empirischen Thatsachen anzuschliessen sucht, ausserordentlich zu ihren Gunsten. — Wenn die Energetik auch noch lange nicht den Schlussstein unserer Naturerkenntniss bildet, so bedeutet sie doch wohl einen wahren Fortschritt, eine Vereinfachung gegenüber den alten Theorien.

Die Bedeutung der alten Begriffe wird dadurch nur geändert, aber nicht minderwertig gemacht.

Wie wir noch heute von Sonnenaufgang und -untergang sprechen, obschon wir wissen, dass die Erde sich um die Sonne bewegt, oder wie wir immer noch von Wärmemenge und Elektricitätsmenge sprechen, obgleich bekannt ist, dass Wärme und Elektricität blosse Zustände sind, so werden wir auch fernerhin von Materie, von Kraft, von Atomen und von Aether reden, obgleich wir überzeugt sind, dass die Energie die einzig reelle Grundlage unserer Naturerkenntniss ist.

Es mag hier als Anhang ein Versuch gegeben werden, der Energetik eine etwas präcisere, mathematische Grundlage zu geben, wobei aber keineswegs Anspruch auf erschöpfende Behandlung gemacht wird.

Um zunächst eine Definition des Energiebegriffes aufzustellen, halten wir uns am einfachsten an die von *Planck* in seinem vorzüglichen Buche «Das Princip der Erhaltung der Energie» (Leipzig 1887) gegebene. Mit einigen Abänderungen lautet dieselbe:

«Die Energie eines Raumsystems in einem bestimmten Zustand ist der in bestimmten Einheiten gemessene Betrag aller Wirkungen, welche ausserhalb des Systems hervorgerufen werden, wenn dasselbe aus seinem Zustande in einen auf beliebige Weise nach Willkür fixirten Nullzustand übergeht.»

Statt «materielles System» ist hier Raumsystem gesagt. In der Energetik sieht man ja von der Materie ab und der wahre Inhalt des alten Ausdruckes «materielles Punktsystem» ist doch nur der, dass Raumpunkte angenommen werden, welche Kraftcentren sind, also Energie ausgeben. Unter Raumsystem wird man im Allgemeinen einen zusammenhängenden Raumtheil sich denken; wenn es aber (der mathematischen Behandlung willen) Bedürfniss wird, ein System nach Art getrennter, materieller Punkte zu betrachten, so hat man einfach das Raumsystem in einzelne, getrennte Raumelemente, von denen jedes ein Energiedifferential besitzt, zu zerlegen. — Nur liegt dann darin keine metaphysische Hypothese (wie bei der Atomistik), sondern eine bloss mathematische, bequeme Methode, wie sie ja überall, wo die Differentialrechnung benutzt werden soll, angewendet wird.

Hingegen hat das Ersetzen des Wortes «materielles System» durch «Raumsystem» den grossen Vorzug, dass diese Definition auch ohne Weiteres auf nicht materielle Vorgänge, also auf ausgestrahlte Licht-, Wärme- und Elektricitäts-Energie übertragbar ist. — Eine zweite Verallgemeinerung liegt darin, dass die Natur der Einheit, in denen die Wirkungen bei Veränderung des Raumsystems zu messen sind, noch nicht bestimmt ist.

Abgesehen von diesen 2 Aenderungen gelten alle von Planck in seinem Buche gemachten Auseinandersetzungen; es soll desshalb darauf nicht weiter eingegangen werden.

Nachdem in dieser Weise der Energiebegriff definirt ist, ist sein Grundgesetz, das sog. «*Energieprincip*» zu formuliren.

Planck definirt es also (mit entsprechender Aenderung): «Die Energie eines Raumsystems in einem bestimmten Zustand genommen

in Bezug auf einen bestimmten andern Zustand als Nullzustand, hat einen eindeutigen Werth.»

Eine ähnliche Definition gibt *Helm* in seinem Werke: «Die Lehre von der Energie» (Leipzig 1887), die wir also umformen können:

«Die Energie eines Raumsystems ist eine nur vom augenblicklichen Zustande des Systems abhängige, veränderliche Grösse.»

Diese allgemeinste Form des Energieprincips führt bei einem für sich abgeschlossenen Raumsystem, aus dem keine Energie heraus und keine hineintreten kann, zum Princip der Erhaltung der Energie, das wir also formuliren:

«Bei jeder möglichen Veränderung eines für sich abgeschlossenen Raumsystems bleibt die Gesammtsumme der Energie unverändert.»

In Uebereinstimmung mit den Betrachtungen von *Helm* (Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 35. — 1890) muss darauf Nachdruck gelegt werden, dass dieses Energieprincip für alle «möglichen» Aenderungen des betreffenden Systems gelten muss und nicht nur für die wirklich eintretenden. Ein System kann theoretisch sich in zahllosen Weisen ändern, in Praxis findet die Aenderung nur in einem ganz bestimmten Sinne statt. Das Energieprincip gilt für alle denkbaren Aenderungen; um zu wissen, welche wirklich eintritt, muss ein zweites Grundgesetz der Energetik aufgestellt werden. Dasselbe ist noch nicht in definitiver Fassung gefunden. Die diesbezüglichen Untersuchungen von *Ostwald* haben noch kein allgemein anerkanntes Gesetz zu Tage gefördert. Auch hier mag diese Frage noch offen bleiben, wir werden erst nachher einen speciellen Fall dieses Gesetzes besprechen.

Damit sind wohl die hypothetischen Grundlagen der Energetik festgestellt; sie sind zusammengefasst in der Definition des Energiebegriffes, im Energieprincip (resp. im Princip der Erhaltung der Energie) und in dem noch nicht formulirten zweiten Grundgesetz der Energetik, dem sog. Princip des ausgezeichneten Falles.

Die weitern Ausführungen sind entweder experimentelle Festsetzungen oder mathematische Entwicklungen.

Durch das Experiment sind zunächst die Einheit der Energie und nachher die verschiedenen Formen derselben und endlich deren Zerlegung in Capacität und Intensität zu bestimmen.

Offenbar sind die mechanischen Arbeits-Einheiten nicht geeignet, als Einheiten der Energie zu dienen, weil sie zu leicht wieder die alten mechanischen Begriffe in die Energetik hineinschmuggeln. Um

so besser sind die Wärmeerscheinungen verwendbar. Zunächst ist die Wärmetheorie überhaupt auf das Energieprincip gegründet, und ferner ist die Ueberführung irgend einer Energieform in Wärme immer die häufigste und am leichtesten und vollkommensten ausführbare. Somit definiren wir:

»Die Einheit der Energie ist diejenige Energie, welche 1 kg. reines Wasser von $0^0$ C auf $1^0$ C erwärmt.«

Jede Energieform lässt sich in dieser Einheit ausdrücken, wobei sich gleichzeitig deren Abhängigkeit von gewissen Grössen, den Intensitäten, feststellen lässt.

Ein geschlossener, galvanischer Stromkreis bildet z. B. ein Raumsystem. Seine gesammte Wirkung äussert sich als Wärme; misst man diese Wärme, so erhält man seine Energie. Die genauere Untersuchung dieser abgegebenen Energie führt auf das Gesetz von Joule: die Energie ist $= i^2.w$, oder $= \frac{E^2}{w}$, oder $= E.i$.

Weitere Untersuchung zeigt, dass solche Energie nur auftritt, wenn E von Null verschieden ist, und ferner dass die Grösse w für ein gegebenes Raumsystem (d. h. für einen gegebenen Stromkreis) konstant bleibt. Es liegt also nahe, die Grösse E, die sog. elektromotorische Kraft, resp. ihr Quadrat $E^2$, als Intensität zu bezeichnen, und den andern konstanten Faktor, $\frac{1}{w}$, als Capacität.

So lassen sich alle Energieformen untersuchen und zerlegen. Von Wichtigkeit ist diese Ausführung bei der Bewegungsenergie.

Ein Raumsystem bewege sich mit einer Geschwindigkeit v. Um dessen Energie nach der aufgestellten Definition zu ermitteln, hat man die äussern Wirkungen zu messen, welche entstehen, wenn dieses System von seinem gegenwärtigen Zustande in einen Nullzustand gelangt.

Als Nullzustand werde die Geschwindigkeit o gesetzt. Die Energien sind wiederum in Wärmeeinheiten anzugeben. — Wenn ein solches (starres) Raumsystem mit der Geschwindigkeit v an eine starre Wand stösst, so gelangt es zur Ruhe, es ist in den gewünschten Nullzustand versetzt. Dabei äussert sich seine Energie in Wärmewirkungen und die experimentell bestimmbare Erwärmung gibt ein Mass der Bewegungsenergie. — Weitere Untersuchungen würden zeigen, dass bei ein und demselben Raumsystem (demselben Körper) die Erwärmung proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit sei, ferner dass sie

dem Volumen des bewegten Raumsystems direkt proportional und endlich, dass sie von der Natur des Raumsystems (das ist nichts anderes, als von den übrigen, in ihm eingeschlossenen, chemischen, thermischen Energien etc.) abhängig sei.

Also ist die Bewegungsenergie $= K . V . v^2$, wo v die Geschwindigkeit, V das Volum und K eine von Körper zu Körper sich ändernde Grösse ist. Da die Bewegungsenergie nur besteht, so lange v von Null verschieden ist, so wird $v^2$ zweckmässig die Intensität, hingegen der bei der Bewegung sich nicht ändernde Faktor die Capacität genannt. Die Hälfte dieses Faktors $\frac{K . V}{2}$ ist dann die in der Mechanik so wichtig gewordene Grösse, die Masse.

Etwas schwierig ist die Behandlung der sog. Raumenergie, weil dieselbe auf die Gesetze der Gravitation führt und in der Energetik eine ganz andere Behandlungsweise verlangt, als in der alten Mechanik mit ihrer Theorie der Fernewirkung. Der Begriff der mechanischen Arbeit (Kraft mal Weg) hat in der Energetik nur noch Sinn, wenn er sich auf die Gravitation bezieht. In der That sind Wärme Elektricität, Licht, Elasticität, Affinität u. s. w. bestimmte Energieformen, die mit dem Kraftbegriff nichts zu thun haben. Sieht man noch von passiven Widerständen ab, so gibt es keine Arbeitsform, die nicht durch die Gravitation hervorgerufen wäre, resp. durch die Schwerkraft auf unserer Erde.

Die Raumenergie spielt desshalb in der Energetik dieselbe Rolle wie die Gravitation in der alten Mechanik. Und wie dort die Gravitationsgesetze als einfache Thatsache angenommen werden, ohne dass man sich über deren Ursache Rechenschaft geben kann, so ist es hier dasselbe mit den Raumenergiegesetzen. Nur ist bei letztern der grosse Vortheil, dass sie die Annahme einer unvermittelten Fernewirkung umgehen.

Bevor dies erläutert wird, mögen zunächst einige allgemeine Betrachtungen darthun, in welcher Weise sich die Raumenergie in Bewegungsenergie umformt (also die potentielle Energie in kinetische).

Wir denken uns ein sog. konstantes Raumenergiefeld. Jedes Raumelement $dv$ (seine Raumcoordinaten seien x, y, z) möge eine zu allen Zeiten unveränderliche Energiemenge $e . dv$, die «Raumenergie», besitzen. Die Vertheilung dieser Raumenergien sei ein für alle mal gegeben: $e = f(x, y, z)$ sei eine stetige, von der Zeit unabhängige Funktion.

In dieses Feld komme eine andere Energieform, die im Raume beweglich ist, hinein. So möge im Raumelement $d\tau$ eine gewisse Wärme-, Volum-, Elektricitäts-, chemische Energie etc., im Gesammtbetrag $\varepsilon d\tau$ vorhanden sein. Wir nennen sie im Unterschied zur vorigen die »Körperenergie«. Da hier nur mechanische Erscheinungen starrer Körper untersucht werden sollen, so können wir annehmen, dass alle diese Energien im Raumelement $d\tau$ unveränderlich bleiben mögen. Es ist dieselbe Annahme, die stillschweigend in der Mechanik starrer Körper gemacht wird.

Das Auftreten von Körperenergie in einem Raumenergiefeld wird in der Regel eine Bewegung der Körperenergie zur Folge haben. Wir dürfen aber nicht annehmen, dass die Körperenergie nur zufällig mit einer gewissen Raumenergie zusammenfällt; sondern die an einer Stelle liegenden Energien bilden ein fest zusammenhängendes Ganzes, so dass bei der Bewegung sowohl Körper- als auch Raumenergie gleichzeitig sich fortbewegen. Das ist kein Widerspruch mit der vorhin festgestellten Konstanz der Raumenergie; denn in dem Masse als die Körperenergie sich bewegt und die Raumenergie mit sich fortführt, gleicht sich die entstandene Lücke hinter ihr sofort wieder aus, gerade wie bei einem im Wasser sinkenden Körper.

Ist z. B. im Punkte (x y z) zur Zeit t die Raumenergie $e \cdot d\tau$ und dabei die Körperenergie $\varepsilon \cdot d\tau$, so ist zur gleichen Zeit im benachbarten Punkt $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ die Raumenergie $(e + de)\, d\tau$, wo $de = \frac{\partial e}{\partial x} dx + \frac{\partial e}{\partial y} dy + \frac{\partial e}{\partial z} dz$, im nächstbenachbarten $(x + 2\,dx,\ y + 2\,dy,\ z + 2\,dz)$ die Raumenergie $(e + 2\,de)\, d\tau$, u. s. w. — Die Körperenergie durchlaufe der Reihe nach alle diese Punkte und komme nach der Zeit $t_0$ mit einer Geschwindigkeit v in den Punkt $(x_0\ y_0\ z_0)$, dessen Raumenergie $e_0\, d\tau$ sei.

Im ersten Zeitdifferential dt gelangt die Gesammtenergie $(e + \varepsilon)\, d\tau$ in den ersten Nachbarpunkt; dann ist in (x y z) die Energie 0, und in $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ die Energie $(e + de)\, d\tau + (e + \varepsilon)\, d\tau$. Sofort findet ein Ausgleich statt, so dass der Anfangspunkt (x y z) die Energie $(e + de)\, d\tau$, und der zweite Punkt die Energie $(e + \varepsilon)\, d\tau$ erhält. So geht dies weiter, $(e + \varepsilon)\, d\tau$ schreitet von Punkt zu Punkt fort. Nach $t_0$ Sekunden ist folgende Aenderung eingetreten:

| | Anfang: | Schluss: |
|---|---|---|
| Im 1. Punkt | $e\,d\tau + \varepsilon\,d\tau$ | $(e + de)\,d\tau$ |
| „ 2. „ | $(e + de)\,d\tau$ | $(e + 2\,de)\,d\tau$ |
| „ 3. „ | $(e + 2\,de)\,d\tau$ | $(e + 3\,de)\,d\tau$ |
| . . . . . | . . . . . | . . . . . |
| . . . . . | . . . . . | . . . . . |
| „ $(n-2)$. „ | $(e_0 - 2\,de)\,d\tau$ | $(e_0 - de)\,d\tau$ |
| „ $(n-1)$. „ | $(e_0 - de)\,d\tau$ | $e_0\,d\tau$ |
| „ n. „ | $e_0\,d\tau$ | $e\,d\tau + \varepsilon\,d\tau =$ |
| | | $e_0\,d\tau + (e - e_0)\,d\tau + \varepsilon\,d\tau.$ |

Das Resultat ist folgendes (wenn man absieht von der Verschiebung der Differentiale de, die ja von keinem merkbaren Einfluss ist, und die auch ausgeglichen werden kann): Die Gesammtsumme der Energie ist dieselbe geblieben, die Vertheilung der Raumenergie auch, hingegen hat sich die Körperenergie bewegt und da sie ihre anfängliche Raumenergie mit sich genommen hat, so ist nun im Endpunkt der Bewegung ein Ueberschuss von Raumenergie $(e - e_0)\,d\tau$ vorhanden, der in einem konstanten Raumenergiefeld nicht vorhanden sein darf. Er wandelt sich also einfach in eine andere Form um; es ist dieser Ueberschuss die bei der Bewegung entstehende *Bewegungsenergie*. Unsere Voraussetzungen führen also ganz natürlich auf den für die Mechanik fundamentalen Satz, dass die Zunahme von Bewegungsenergie immer gleich der Abnahme von Raumenergie ist, und umgekehrt.

Wenn in diesem Punkt $(x_0\ y_0\ z_0)$ die Körperenergie mit ihrer erlangten Geschwindigkeit v auf eine Wand stossen würde, so würde die Bewegungsenergie $(e - e_0)\,d\tau$ sich in Wärme umformen und es würde nur noch die dem Punkte $(x_0\ y_0\ z_0)$ zukommende, unzerstörbare Raumenergie $e_0\,d\tau$, nebst der Körperenergie $\varepsilon\,d\tau$ übrigbleiben. Dabei würde sich dann ergeben, dass die Bewegungsenergie proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit sein muss.

In diesem Zusammenhang liegt aber das Gesetz verborgen, das den Eintritt und Verlauf einer Bewegung bestimmt, also das zweite Gesetz der Energetik, allerdings nur auf den speziellen Fall der Umsetzung von Raumenergie in Bewegungsenergie angewendet. Wir können es also aussprechen:

„Wenn sich in einem konstanten Raumenergiefeld Körperenergie befindet, so wird dieselbe in der Regel in Bewegung versetzt, wobei

sich Raumenergie in entsprechende Bewegungsenergie umsetzt; *die Bewegung erfolgt so, dass die entstehende Bewegungsenergie proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit ist.*»

Darin liegt die ganze Mechanik inbegriffen, und in diesen Ausführungen scheint mir auch der von *Boltzmann* gegen die Energetik in Betreff der Bewegungsenergie gemachte Einwurf befriedigend erledigt. (Wied. Ann. 57. p. 39 — 1896.)

Noch bleibt uns übrig, den Zusammenhang zwischen Körperenergie und Raumenergie zu erörtern.

Die Annahme der Konstanz der Raumenergiefelder ist nicht der Wahrheit entsprechend, sondern nur eine zum Zwecke der leichtern Behandlungsweise gemachte Vereinfachung. — In Wahrheit hat jede Körperenergie die Eigenschaft, die Vertheilung der Raumenergie zu ändern und in Wirklichkeit ist die Bewegung eines Körpers nicht nur von Umsetzung von Raumenergie in Bewegungsenergie, sondern auch von stetigen Aenderungen der umgebenden Raumenergie selber begleitet. Darin liegt ein neues Gesetz der Energetik, das nichts anderes ist als der Ausdruck der experimentellen Thatsache der Gravitation. Es ist hier nicht nöthig, weiter darauf einzutreten, sobald wir bedenken, dass eine völlige Analogie zwischen Wechselverhältniss von Körperenergie und Raumenergie einerseits, und elektrisch geladenen Körpern und dielektrischen Medien andererseits besteht (abgesehen von der Beweglichkeit der Elektricität auf den Leitern).

Zum Schluss mögen die hier aufgestellten Principien auf einige Sätze der Mechanik angewendet werden. — Die folgenden Ableitungen schliessen sich in vielen Punkten an die von *Helm* angegebenen, mit dem Unterschied, dass hier absichtlich nicht die allgemeinen Principien der Mechanik sondern nur einzelne Beispiele elementar abgeleitet werden, und ferner, dass diese Ableitungen sich an die vorhin ausgeführten und (soviel mir bekannt ist) neuen Ideen von Raumenergiefeldern knüpfen, während Heim noch die Begriffe Masse und Kraft als Ausgangspunkt nimmt.

Wir gründen die Mechanik auf folgende 3 Grundgesetze:

1. *In einem Raumenergiefeld ist stets, bei jeder möglichen Veränderung, die Zunahme der Raumenergie* E *gleich der Abnahme der Bewegungsenergie* T, *und umgekehrt.* Also $d\,T = -d\,E$.

2. *In einem Raumenergiefeld geräth eine vorhandene Körperenergie in solche Bewegung, dass ihre Bewegungsenergie proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit ist.*

Also ist für ein Raumelement[1]) $d\tau$ mit den Raumcoordinaten x, y, z, zur Zeit t:

$$T = K \cdot d\tau \left( \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 \right) . = K \cdot d\tau \cdot v^2.$$

3. *Jede Körperenergie modificirt die Vertheilung der umgebenden Raumenergie.*

Zunächst sehen wir von den Wirkungen der Gravitation ganz ab, betrachten also die im dritten Gesetz erwähnte Modifikation als verschwindend.

I. *Homogenes Raumenergiefeld.*

Es sei überall E konstant.

Sei im Punkte (x y z) eine Körperenergie $\varepsilon \cdot d\tau$.

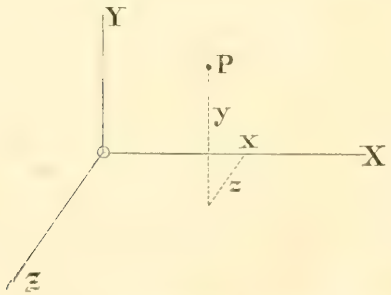
Es ist $dE = 0$, also $dT = 0$, $T =$ konstant,

somit $v^2$ *konstant.* — War v anfangs Null, so bleibt es Null.

Der Körper bewegt sich also mit konstanter Geschwindigkeit; ist er aber Anfangs in Ruhe, so bleibt er konstant in Ruhe.

Darin liegt das *Gesetz der Trägheit.*

II. *Feld mit nach einer Richtung linear sich ändernden Raumenergie.*




Die Raumenergie möge parallel der Y-Axe variiren und zwar linear.

Also ist:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial E}{\partial y} = a \cdot d\tau \qquad \frac{\partial E}{\partial z} = 0.$$

Ist für $y = 0$ die Raumenergie $= E_0$, so folgt für das Raumelement $d\tau$ in dem Punkte P:

$E - E_0 = a \cdot y \cdot d\tau$.

Ist im Punkte P eine Körperenergie $\varepsilon\, d\tau$, so findet demnach Bewegung statt.

Dieselbe ist bestimmt, sobald die Coordinaten x, y, z als Funktionen der Zeit t eindeutig bestimmt sind. Diese Bestimmung lässt sich mit den 2 Grundgesetzen vollziehen.

---

[1]) Es ist hier immer nur von Raumelementen $d\tau$ und nicht von ganzen Körpern die Rede, nicht etwa, weil man sich in der Energetik die Körper als aus materiellen Punkten zusammengesetzt denken würde, sondern nur um der mathematischen Rechnung willen. Durch Integration sind die für ein Raumelement gewonnenen Resultate leicht auf Körper auszudehnen.

Zunächst folgt: $T = K\,dr\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}$

Hier kann t als einzige unabhängige Variable aufgefasst werden, also

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t}\,dt = 2\,K\,dr\left\{\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right\}dt$$

Ebenso $dE = \frac{\partial E}{\partial t}\,dt = \frac{\partial E}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\,dt = a\,dr\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\,dt.$

Diese beiden Ausdrücke müssen einander gleich und entgegengesetzt sein.

Aus ganz entsprechenden Gründen, wie sie *Helm* bei seinen Ableitungen befolgt, muss (da die Gleichsetzung für jede *mögliche* Aenderung gelten soll) diese Gleichung

$$2\,K\,dr\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \left(2\,K\,dr\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a\,dr\right)\frac{\partial y}{\partial t} + 2\,K\,dr\,\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

in 3 zerfallen, nämlich in die 3 Faktoren von $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$ und $\frac{\partial z}{\partial t}$, deren jeder einzeln $= 0$ zu setzen ist.

Daraus folgt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{a}{2K}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

Aus diesen Gleichungen, vereinigt mit passenden Anfangs- und Grenzbedingungen, ergeben sich in bekannter Weise alle Gesetze der Wirkung der Schwerkraft (schiefer Wurf und freier Fall), wobei sich zeigt, dass die Grösse $\frac{a}{2K}$ die bekannte Beschleunigung g durch die Erdanziehung bedeutet.

Die Integration der Gleichungen gibt:

$$\frac{dx}{dt} = c_1 \qquad \frac{dy}{dt} = -g\,t + c_2 \qquad \frac{dz}{dt} = c_3\text{; Geschwindigkeiten.}$$

$$x = c_1 t + c_4 \quad y = -g\frac{t^2}{2} + c_2 t + c_5 \quad z = c_3 t + c_6\text{: Wege.}$$

War das Raumelement Anfangs in Ruhe in der Höhe h über dem Nullpunkt, also zur Zeit $t = 0$: $x = 0$, $y = h$, $z = 0$, so folgt zunächst $c_1 = c_5 = c_6 = 0$ und ferner aus den ersten Differentialquotienten: $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Es bleibt nur:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

$$\frac{dy}{dt} = -gt$$

$$y = -\frac{gt^2}{2}$$

Das sind die Gesetze des *freien Falles.*

Ebenso ergibt sich der *schiefe Wurf.*

Ist das Raumelement Anfangs im Coordinatenursprung und erhält in der Richtung $\alpha$ (mit der positiven X-Axe) einen Antrieb, eine Geschwindigkeit c, so ist offenbar:

für $t = 0$: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

$$\frac{dx}{dt} = c \cdot \cos\alpha,\ \frac{dy}{dt} = c \cdot \sin\alpha,\ \frac{dz}{dt} = 0$$

Also: $c_4 = c_5 = c_6 = 0$

$$c_1 = c \cdot \cos\alpha,\ c_2 = c \cdot \sin\alpha,\ c_3 = 0$$

Somit die gesuchten Wurfgleichungen:

| | | |
|---|---|---|
| $x = c\,t\cos\alpha$ | $\frac{dx}{dt} = c\cos\alpha$ | $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ |
| $y = -\frac{gt^2}{2} + c\,t\sin\alpha$ | $\frac{dy}{dt} = -gt + c\sin\alpha$ | $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$ |
| $z = 0$ | $\frac{dz}{dt} = 0$ | $\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$ |

Aehnlich liessen sich auch die Gleichungen des schwingenden Pendels aufstellen, wenn man den Energiebetrag berücksichtigen würde, der erforderlich ist, damit das Raumelement sich auf einer Kugelfläche bewege.

Ein Punkt muss noch besonders hervorgehoben werden. Die Grösse a ist als absolute Konstante hingestellt, die Grösse $g = \frac{a}{2K}$ ist nach Erfahrung konstant, also müsste auch K es sein, was aber nach Erfahrung wiederum nicht der Fall ist. Es muss also schon hier das dritte vorhin erwähnte Gesetz eine Rolle spielen, insofern als die Konstante K der eingeführten Körperenergie rückwärts die Raumenergiekonstante a beeinflusst.

Dies tritt deutlich bei der nun zu besprechenden Gravitation auf.

### III. *Raumenergiefeld um Gravitationsmittelpunkte.*

Die Gravitation ist die Thatsache, dass jedes Raumelement $d\tau$, in welchem sich eine Körperenergie $\varepsilon\, d\tau$ befindet, eine gewisse Vertheilung der umgebenden Raumenergie erzeugt; in der Weise, dass sie sich in konzentrischen Kugeln anordnet, wobei die Energie umgekehrt proportional dem Quadrate des Radius abnimmt.

Sei z. B. im Coordinatenursprung die Körperenergie $\varepsilon\, d\tau$, so entsteht in Folge dessen im ganzen Raum ein Raumenergiefeld. Im Punkte x y z, im Abstand r vom Coordinatenursprunge wird diese Energie gegeben sein durch die Gleichung $\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{M}{r^2}\, d\tau$, die sich zerlegen lässt in

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{M}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}\, d\tau \qquad \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{M}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial y}\, d\tau \qquad \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{M}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial z}\, d\tau.$$

M ist die Gravitationskonstante des Körperelementes.

Wird ein zweites Raumelement mit Körperenergie in den Raum gebracht, so wird dasselbe einerseits im Energiefelde bewegt, gleichzeitig aber modificirt es die Energievertheilung selber.

Die allgemeinen Formeln für das Raumenergiefeld mehrerer Körperenergien lassen sich folgendermassen aufstellen:

Im Punkte $x_1\, y_1\, z_1$ sei eine Körperenergie, deren Konstante $m_1$ sei, im Punkte $x_2\, y_2\, z_2$ eine andere mit $m_2$, im Punkte $x_3\, y_3\, z_3$ eine dritte mit $m_3$ u. s. w.

Im Punkt x y z entsteht dann eine Raumenergie $E d\tau$, die durch folgende Gleichungen bestimmt wird (wenn $r_1\, r_2\, r_3$ die respektiven Abstände dieses Punktes von den vorigen angeben):

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \left( \frac{m_1}{r_1^2} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{m_2}{r_2^2} \frac{\partial r_2}{\partial x} + \frac{m_3}{r_3^2} \frac{\partial r_3}{\partial x} + \ldots \right) d\tau$$

$$\frac{\partial E}{\partial y} = \left( \frac{m_1}{r_1^2} \frac{\partial r_1}{\partial y} + \frac{m_2}{r_2^2} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial y} + \frac{m_3}{r_3^2} \cdot \frac{\partial r_3}{\partial y} + \ldots \right) d\tau$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \left( \frac{m_1}{r_1^2} \frac{\partial r_1}{\partial z} + \frac{m_2}{r_2^2} \frac{\partial r_2}{\partial z} + \frac{m_3}{r_3^2} \frac{\partial r_3}{\partial z} + \ldots \right) d\tau$$

Dass eine allgemeine Integration dieser Gleichungen nicht möglich ist, ist bekannt.

Es möge nur der einfachste Fall untersucht werden.

IV. *Raumenergiefeld eines einzigen Gravitationscentrums.*

Es seien 2 Raumelemente mit Körperenergie vorhanden; aber das eine überwiege so sehr, dass der Einfluss des zweiten auf die Raumenergievertheilung durchaus vernachlässigt werden könne.

Also $m_2 = 0$, $m_1$ sei $= m$ gesetzt.

Letzteres sei im Coordinatenursprung, das andere zur Zeit t im Abstand r, mit den Coordinaten x, y, z.

Da das Raumenergiefeld nur von dem einem bestimmt wird, so tritt natürlich keine Bewegung desselben ein und die Untersuchungen beziehen sich nur auf das zweite.

Die Gleichungen lauten:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{m}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} d\tau \qquad \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{m}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} d\tau \qquad \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{m}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} d\tau$$

Auch hier sind x, y, z als Funktionen der Zeit t zu bestimmen. Also gilt t als unabhängige Variable, somit

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt = 2K d\tau \left\{ \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right\} dt$$

und $$dE = \frac{\partial E}{\partial t} dt = \left\{ \frac{\partial E}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} dt \right\}$$

Durch Gleichsetzung zerfällt diese Gleichung wiederum in 3:

$$2K d\tau \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{m}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} d\tau$$

$$2K d\tau \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\partial E}{\partial y} = -\frac{m}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} d\tau$$

$$2K d\tau \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{m}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} d\tau.$$

Also:

$$-\frac{2K}{m} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$-\frac{2K}{m} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial y}$$

$$-\frac{2K}{m} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial z}.$$

Es ist bekannt, wie sich aus diesen Gleichungen ergibt, dass der Punkt (x y z) sich in einem Kegelschnitt um den erstern bewegt, und wie überhaupt die Kepler'schen Gesetze daraus folgen. —

Diese wenigen Andeutungen mögen vielleicht dazu beitragen, auf den Weg hinzuweisen, auf welchem die Probleme der Mechanik von rein energetischen Standpunkte aus gelöst werden könnten.

**Dr. A. Girtanner.**

# Ueber das Steinbockgehörn aus dem Pfahlbau von Greng im Murtensee.

Bekanntlich reichen nach Rütimeyers Untersuchungen die ersten prähistorischen Spuren des Alpensteinbocks in der Schweiz, aus deren Höhlen die meisten Steinbockreste überhaupt zu Tage gefördert worden sind, in die Renntierperiode hinein, vertreten in den Höhlen von Thayingen, Liesberg, Veirier und Villeneuve. Je näher dem Alpenmassiv, um so zahlreicher sich findend treten sie schon in den nordschweizerischen Höhlen stark zurück, wenn sie sich zwar auch dort konstant nachweisen lassen. Bei Veirier und Villeneuve sind diese Reste aber in einer Menge vorhanden, die einerseits den Alpensteinbock als ein Charaktertier der Fauna jener Zeiten erkennen lassen, indem seine Knochen an Zahl nur durch die vom Renntier und Wildpferd übertroffen werden, während anderseits ihre dortige Häufigkeit gegenüber dem raschen Verschwinden entfernter vom Fusse der Alpen, den Steinbock als ein Hochgebirgstier ab Origine ausweisen. Jedoch nicht nur bei Höhlenfunden, sondern auch in einer Flussablagerung aus der Renntierzeit ist wenigstens ein Zeuge seiner damaligen Anwesenheit zum Vorschein gekommen in Gestalt eines mächtigen Hornzapfens von 235 mm. Umfang, der gleichzeitig mit Renntierknochen einer Kiesgrube bei Windisch enthoben wurde. In den spätern Perioden prähistorischer Zeiten nimmt dann (ebenfalls nach Rütimeyers Untersuchungsresultaten) der Steinbock entfernter vom Alpenmassiv sehr

rasch ab und aus dem Alluvium kennt er ihn aus einer spätern als der Glacialperiode überhaupt nicht mehr. — Nur in den grossen Knochenvorräten der Pfahlbauten ist ihm diese Species (wie auch Prof. Studer bemerkt), jedoch nur ein einziges Mal, im Pfahlbau bei Obermeilen als einzelner vollständiger Hornzapfen, begegnet. An diesen erstmaligen Fund reiht sich nun als zweiter der ganz neue von Herrn Prof. Studer näher beschriebene aus dem Pfahlbau bei Greng am Murtensee an, der den erstern an wissenschaftlichem Wert durch die viel bedeutendere Benützungsfähigkeit zu vergleichenden Studien mit dem Alpensteinbock unserer Zeit, weit übertrifft. — Der Hornzapfen von Meilen misst 50 cm. über die vordere Krümmung, hat einen Basisumfang von 26 cm. und berechnete Rütimeyer darnach die Länge der Hornscheiden mit 90—100 cm., womit dieselbe keinenfalls überschätzt war. Die Abwesenheit des zweiten Hornzapfens mit Schädelstück verunmöglicht aber jede Abschätzung bezgl. Divergenz sowohl dieser als der Hornscheiden selbst, und damit auch eine richtige Vorstellung von der Totalerscheinung des ganzen Gehörns auf dem Schädel des Tiers.

Viel besser steht es nun diesbezüglich bei dem Schädelstück von Greng mit seinen beiden auf ihm noch festsitzenden wenn zwar nur zu ziemlich genau $^2/_3$ ihrer ursprünglichen Länge vorhandenen Hornzapfen von ebenfalls je 26 cm. Wurzelumfang.

Wir haben demnach auch in diesem Fundstück die Überbleibsel eines nach heutigen Begriffen riesenhaften Individuums vor uns, auch nach der ganzen Erscheinung des auch im Gesichtsteil kolossal angelegten Cranium. Zahlreiche Messungen an den stärksten Exemplaren aus neuerer und neuester Zeit ergeben nämlich, dass nur sehr selten noch der äussere Wurzelumfang der Horn*scheiden* denjenigen dieser enormen Horn*zapfen* annähernd erreicht, welcher bei einem so schwer angelegten Gehörn seinerseits wieder um wenigstens 6 cm. hinter dem der Hornscheiden zurückstehen musste, und der bei diesen zwei urweltlichen Gehörnen 31 cm. mit Sicherheit gemessen hat. Nur sehr selten misst bei dem Alpensteinbock unseres Jahrhunderts der Basisumfang der Hornzapfen etwas weniges mehr als 22 cm. und der äussere Hornwurzelumfang höchstens 25—26 cm.

Mit Hülfe eines mehr als genügenden Vergleichungsmaterials ist es mir nun möglich gewesen, über die Grössenverhältnisse des Grenger-Gehörns ziemliche Sicherheit zu verschaffen, wobei bemerkt sein mag, dass dasselbe (auch nach dem vorhandenen Schädelteil und

den Ansätzen der Hornzapfen am Schädel), wenn zwar zu den schwerern kräftigentwickelten, so doch nicht zu den eigentlich schwerfälligen, besonders umfangreichen seiner Art gehört hat. Es ist eben nicht zu übersehen, dass so riesenhafte Reste zu leicht den Eindruck der Plumpheit machen, wenn uns bei ihrer Betrachtung die geringern Grössenverhältnisse des nämlichen Tieres aus der Neuzeit vorschweben, an die unser Auge gewöhnt ist. Die Stellung der Hornzapfen auf dem Schädel zu dem Stirnbein und dem Gesichtswinkel gestatten immer noch die Annahme eines ziemlich hochragenden Gehörns, da bei der schwersten Form desselben schon die Stellung und die Richtung der Hornzapfen sich mehr der horizontalen als der vertikalen zuneigt.

Der Beantwortung der Frage nach den Grössenverhältnissen des Grengergehörns habe ich im folgenden die Vergleichung seiner Reste mit 10 Stücken der stärksten Alpen-Steinbock-Gehörne der neuern Zeit aus meiner bezgl. Sammlung zu Grunde gelegt. Von denselben gehören Nr. 1—5 der kräftig entwickelten schweren, ziemlich stark divergent verlaufenden, Nr. 5—10 der graciler gebauten leichtern, wenig divergierenden Form an. (Siehe Tabelle Seite 50.)

Welche Verhältnisse ergeben sich nun nach dieser Zusammenstellung für das Grenger-Gehörn bezüglich Länge der Hornscheiden und Hornzapfen und ihrer Divergenz und den Basisumfang?[1])

*1) Länge und Divergenz der Hornzapfen.* Mit Hülfe zweier schmaler, biegsamer Kartonstreifen, an dem noch nicht arrodierten Teil des linkseitigen, bessern Hornzapfens, auf der vordern und hintern Seite aufgelegt und mit der Hand gut fixiert, in richtiger Führung nach hinten und aussen gebogen, mit stumpfem Ende, lässt sich der fehlende Hornzapfenteil vorne mit 18, hinten mit 15 cm., die Länge der vollständigen Hornzapfen vorne mit 50 cm. (32 | 18 cm.), hinten mit 45 cm. angeben; die Divergenz der immer abgestumpften Spitzen mit 59 cm.

[1]) Es ist dabei festzuhalten 1) dass zur speciellen Vergleichung der Einfachheit halber nur Nr. 1 der Tabelle herbeigezogen worden ist, während aus der ganzen Tabelle noch viel anderes bezügliches miterseben werden kann; 2) dass wir es bei dem Grenger-Stück immer mit dem enormen Basisumfang von 26 cm. der Hornzapfen zu thun haben, der den von Nr. 1 um nicht weniger als 3,8 cm. übersteigt, ein Unterschied, der sich in allen Dimensionen, auch des Gehörns selbst, stark geltend machen muss; 3) dass bei allen Berechungen bezügl. Hornscheiden deren hintere Seite — weil glatte und deshalb viel sicherere — vorzüglich benützt worden ist.

## Grössenmasse von 10 Capra Ibex (mas, adult) Gehörnen aus dem 19. Jahrhundert.

### I. Schwere kräftig angelegte Gehörnform, mässig divergent verlaufende Hornscheiden, Spitzen kaum oder gar nicht konvergierend.

| Nr. | Hornscheidenlänge nach der vordern gewulsteten Krümmung gemessen | Hornscheidenlänge nach der hintern glatten Krümmung gemessen | Spitzendivergenz der Hornscheiden | Basisumfang der Hornscheiden | Hornzapfenlänge nach der vordern Krümmung gemessen | Hornzapfenlänge an der hintern Krümmung gemessen | Spitzendivergenz der Hornzapfen | Basisumfang der Hornzapfen | Alter nach Jahresringen, nicht nach Knoten berechnet |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | cm. | cm. | cm. | cm. | cm. | cm. | cm. | cm. | Jahre alt |
| 1 | 82 | 67 | 56 | 25 | 46 | 39 | 40 | $22_{,20}$ | 15 |
| 2 | 78 | 63 | 44 | 25 | 44 | 38 | 33 | 22 | 13 |
| 3 | 76 | 64 | 40 | 25 | 39 | 35 | 33 | 21 | 11 |
| 4 | 75 | 63 | 33 | $23_{,70}$ | 40 | 35 | 30 | $20_{,40}$ | 12 |
| 5 | 72 | 58 | 40 | 25 | 34 | 29 | 28 | 20 | 12 |

### II. Schlanke leicht gebaute Gehörne, wenig divergent verlaufende Hornscheiden. Spitzen konvergierend.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 81 | 68 | 30 | $21_{,70}$ | 40 | 34 | 25 | 20 | 11 |
| 7 | 78 | 66 | 28 | 20 | 37 | 34 | 22 | 18 | 16 |
| 8 | 75 | 63 | 28 | 21 | 37 | 33 | 20 | 20 | 10 |
| 9 | 73 | 60 | 26 | 21 | 36 | 31 | 20 | 19 | 11 |
| 10 | 71 | 58 | 28 | 21 | 36 | 32 | 22 | 19 | 12 |

NB. Bemerkenswerter konstanter Unterschied zwischen Hornscheiden, Hornzapfen und Wurzelumfang bei Nr. I und II.

*2) Länge und Divergenz der Hornscheiden.* Nr. 1 der Tabelle weist nach, dass der massive (nicht mehr hohle) Spitzenteil dieser Hornschalen an deren vorderer Krümmung 36 cm., an der hintern 28 cm. (82—46, und 67—39) beträgt, bei einer vordern Hornzapfenlänge von 46, einer hintern von 39 cm. und einem Basisumfang von 22.20 cm. Diese Masse auf das Grenger-Gehörn mit 50 cm. Hornzapfenlänge und 26 cm. Basisumfang übertragen, ergibt für dasselbe (angesichts des enormen Basisumfangs der Hornzapfen) einen soliden Hornscheiden-Spitzenteil von 50—60 cm. und somit eine Totallänge der Hornscheide von 160, und noch weit wahrscheinlicher von wenigstens 110 cm., ein Längenmass, das allerdings das Gehörn des *Capra sibirica* heute noch erreicht und selbst wesentlich übersteigen kann, jener kolossalen Steinbockart der centralasiatischen Hochgebirgsketten, die unserm alpinen Steinbock von allen Arten weitaus am nächsten steht.

*3) Basisumfang der Hornscheiden.* Nr. 1 der Tabelle besitzt bei 22.20 cm. Umfang der Hornzapfenbasis einen äussern Hornscheiden-Basisumfang von 25 cm. Bemessen wir hiernach das Grenger-Gehörn mit seinen 26 cm. Hornscheiden-Umfang, zusammen mit der ganzen grossen Anlage des vorhandenen Schädelstückes, so ergibt sich ohne jede Überschätzung ein Hornschalenwurzelumfang von 31 cm., eher mehr als weniger.

*4) Alter des Grenger-Bocks.* Bekanntlich lassen sich an den Hornzapfen älterer Steinbockschädel sichere Altersmerkmale nicht finden, während dies bis zum 4. Jahre möglich ist, durch die Abdrücke der Knoten und Jahresringe an denselben. Wohl aber lässt sich im vorliegenden Falle aus der Stärke der vorhandenen Hornzapfen und der verstrichenen Stirnbeinnaht auf ein voll und fertig entwickelt gewesenes älteres Tier schliessen.

Wahrscheinlich zählte schon der Grenger-Bock zu seinen Lebzeiten zu den kräftigen Böcken seiner Art, und that der Grenger-Pfahlbauer wohl recht daran, ein schädelechtes Alpensteinbockgehörn mit einer Hörnerlänge von 110 cm., einem Spitzenabstand von 80, und einem Wurzelumfang von 31 cm., besetzt mit einer Folge von so voll entwickelten Knoten, wie sie unsere Zeit ebenfalls nicht mehr zu erzeugen vermag, als eine schätzenswerte Trophäe zu betrachten, würdig den Giebel seiner dürftigen Hütte zu zieren, bis sie in Rauch aufging oder mitsamt ihrem Hörnerschmuck, verlassen und vermodert, im Sumpfe versank. Sein letzter Besitzer mochte wohl nicht ahnen, dass nach so langer Zeit den dürftigen Resten seiner stolzen Hütten-

zier alle Masse mühsam nachgerechnet, mit den schwächergewordenen Nachkommen seiner schweren Jagdbeute nach allen Seiten verglichen würden, und dass sie alsdann im Palaste der Wissenschaft als ein Besitztum von grossem Wert und Interesse hochgehalten und gepriesen werden könnten.

J. H. Graf.

# Verzeichnis

der

## gedruckten mathematischen, astronomischen und physikalischen Doktor-Dissertationen der schweizer. Hochschulen bis zum Jahre 1896.

### I. Basel.

Vorbemerkung: In der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung der philosophischen Fakultät der Universität Basel ist der Druck der Doktordissertationen erst seit Anfang der 80er Jahre obligatorisch und Nachforschungen haben ergeben, dass von 1850—1880 keine mathematischen oder physikalischen Doktordissertationen gedruckt worden sind.

#### a. Mathematik.

*Veillon, Henri.* Über ebene Kurven dritter Ordnung, welche einen Mittelpunkt haben. Basel 8° 1890.

*Weth, Rudolf.* Zur Entwicklungsgeschichte des Funktionsbegriffs. Basel 8° 1891.

#### b. Physik.

*Thoma, Max.* Über die Absorption von Wasserstoff durch Metalle. München 8° 1888.

*Lux, Heinrich.* Untersuchungen über die Abhängigkeit des elektrischen Leitungsvermögens der Elektrolyte von den in ihnen enthaltenen pulverförmigen dielektrischen Medien. München 8° 1889.

*Schmidt, G. C.* Über die statische und dynamische Methode der Spannkraftmessung organischer und anorganischer Stoffe. 8° ohne Datum und Jahr (wahrscheinlich 1892).

*Wirkner, C. G.* Studien über Dampfspannkraftmessungen am Benzol, an Derivaten des Benzols und am Äthylalkohol. Basel 8° 1894.

*Ochs, Karl Friedrich.* Über Oxidations- und Reduktionsketten nebst einem Beitrag zur Sauerstoffkatalyse der schwefligen Säure. Göttingen 8° 1895.

*Kohn, Alfons.* Versuche über magnetisch weiche und harte Körper Leipzig 8° 1896.

*Naurach, Hermann*, Über die Abhängigkeit des durch Hysteresis bedingten Effektverlustes im Eisen von der Stärke der Magnetisierung. Zürich 8° 1896.

*Berent, Stanislaus*, Über das kapillare Verhalten der Flächen im Steinsalz und Sylvin gegenüber Mutterlaugen. Leipzig 8° 1896.

*Tesse, Théodore S.*, Dampfspannkraftsmessungen an Abkömmlingen des Benzols und über die Bedeutung solcher Messungen für die Lehre von den Siedepunktsregelmässigkeiten. Leipzig 8° 1896.

## II. Bern.

### a. Mathematik und Astronomie.

*Geiser, C. F.*, Beiträge zur synthetischen Geometrie 1866. Zürich, Schabelitzsche Buchhandlung (Cæsar Schmidt) 36 S. gr. 8°.

*Meyer, A.*, Zur Theorie der unbestimmten ternären quadratischen Formen. 1871. Zürich, Zürcher und Furrer, 37 S. 8°.

*Graf, J. H.*, Beiträge zur Theorie der Riemannschen Fläche. 1878 Zürich, Orell Füssli & Cie. 46 S. 8°.

*von Litwinoff-Iwaschkina, Elisabeth*, Lösung einer Abbildungsaufgabe. 1879. Petersberg, Druckerei der K. Akademie der Wissenschaften. 28 S. gr. 8°.

*Hilfiker, Jakob*, Über die Bestimmung der Konstante der Sonnenparallaxe, mit besonderer Berücksichtigung der Oppositionsbeobachtungen. 1878. Bern (Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft) 89 S. 8°.

*Graefe, Friedrich*, Der Paskalsche Satz. 1879. Bern, Stämpflische Buchdruckerei.

*Huber, Gottlieb*, Anwendungen der konformen Abbildung. 1883. Zürich Zürcher und Furrer, 67 S. 8°.

*Bigler, Ulr.*, Potential einer elliptischen Walze. 1889. 86 S. gr. 8°.

*Moser, Christ.*, Über Gebilde, welche durch Fixation einer sphärischen Kurve und Fortbewegung des Projektionscentrums entstehen. 1887. 31 S. 8°.

*Jonquière, Alfred*, Über einige Transcendente, welche bei der wiederholten Integration rationaler Funktionen auftreten. 1889. Bern. K. J. Wyss (Stockholm P. A. Norstedt und Söner). 50 S. 8°.

*Büzberger, F.*, Ein mit der Theorie algebraischer Flächen zusammenhängendes planimetrisches Problem. 1890. 85 S. 8°.

*Tschumi, Hans*, Ein Beitrag zur Geschichte und Diskussion der Cycloiden. 1892. Bern, K. J. Wyss. 48 S. 8°.

*Eggenberger, Joh.*, Beiträge zur Darstellung des Bernoullischen Theorems, der Gammafunktion und des Laplaceschen Integrals. 1893. Bern, K. J. Wyss. 76 S. 8°.

*Münger, Fritz*, Die eiförmigen Kurven. 1894. Bern, K. J. Wyss, 46 S. 8°.

*Stähli, Fritz*, Die Cylinderfokalen. 1894. Bern, K. J. Wyss, 50 S. 8°.

*Schenkel, Hans*, Kritisch-historische Untersuchung über die Theorie der Gammafunktion und Eulerschen Integrale. 1894. Uster-Zürich. A. Gull (vorm. A. Diggelmann) 67 S. 8°.

*Wagner, Carl*, Beiträge zur Entwicklung der Besselschen Funktion I. Art. 1894. Bern, K. J. Wyss, 65 S. 8°.

*Epstein, S. S.*, Die vier Rechnungsoperationen mit Besselschen Funktionen nebst einer geschichtlichen Einleitung. 1894. Bern, K. J. Wyss, 58 S. 8°.

*Gubler Ed.*, Verwandlung einer hypergeometrischen Reihe im Anschluss an das Integral $\int_0^a J(x) e^{-bx} \cdot x^{c-1} dx$. 1894. Uster, E. Weilenmann. 38 S. 8°.

*Crelier, Louis*, Sur quelques propriétés des fonctions Besséliennes tirées de la théorie des fractions continues. 1896. Milan, Bernardoni de C. Rebeschini et Cie. 31 S. 4°.

### b. Physik.

*Simmler, Rud. Theodor*, Beiträge zur chem. Analyse durch Spektralbeobachtungen. Chur 1861, Pradella. 8° 59 S. 1 Taf.

*Buri, Eugen*, Über das verbesserte Wildsche Polaristrobometer. Bern, Rieder & Simmen 1870. 28 S. 8°.

*Badertscher, G. A.*, Über den Einfluss der Temperatur auf Phosphorescenzerscheinungen. 33 S. 8°. Bern 1888. (Mitteilungen der bern. Naturf. Gesellschaft 1889. S. 75 u. ff.)

## III. Genf.

### a. Mathematik und Astronomie.

*Decrue, David*, De l'intégration des équations aux différences partielles linéaires en séries d'intégrales particulières. 1837. 4°. 40 p. Genève, Lador et Ramboz.

*Ritter, Elie*, Essai sur les refractions astronomiques dans le voisinage de l'horizon. 1837. 4°. 23 p. Genève, Lador et Ramboz.

*Gautier, Emile*, Essai sur la théorie des perturbations des comètes. 4°. 1847. 146 p. Genève, Ramboz.

*Cailler, Charles.* Recherches sur les équations aux dérivées partielles sur quelques points du calcul de généralisation. 8°. 98 p. Genève, Carey.

*Gautier, Raoul.* La première comète périodique de Tempel. 1867 II. 4°. 110 p. Genève, Schuchardt.

### b. Physik.

*Aubert, L.,* Thèse sur les lois de la distribution de la chaleur dans les corps solides (Paris, Bachelier 1837). 1837. 4°. 47 p.

*Guye, Ch.-Eug.,* Sur la polarisation rotatoire du chlorate de soude. 6 juillet 1889. Arch. 1889, t. 21, p. 266; t. 22, p. 130; en extrait: Comptes-Rendus 1889, t. 108, p. 348.

*Perrot, Fs.-Louis,* Recherches sur la refraction et la dispersion dans une série isomorphe de cristaux à deux axes (sulfates doubles à 6 $H^2O$), 27 janvier 1891. Arch. 1890, t. 25, p. 26; en extrait: C. R. 1890, t. 111, p. 967.

*Dussaud, Frantz.* Sur la refraction et la dispersion du chlorate de soude cristallisé. 7 mai 1892. Arch. 1892, t. 27, p. 349, 380, 521; en extrait: C. R. 1891, t. 113, p. 291.

*Borel, Charles.* Recherches des constantes diélectriques principales de quelques substances cristallisées biaxes (orthorhombiques et chicorhombiques), suivies d'une notice relative à des phénomènes dynamiques dus à l'électrisation résiduelle des diélectriques. 8 juillet 1893. Arch. 1893, t. 30, p. 45, 131, 219, 327, 422; en extrait: Arch. 1893, t. 29, p. 317; C. R. t. 116, p. 1192, 1509.

*Galopin, Paul.* Effets thermiques dus à la compression. 17 déc. 1893. Genève 1893, petit in-4 (Travail du laboratoire de Mr. Raoul Pictet à Berlin). En extrait: C. R. 1892, t. 114, p. 1525. Arch. 1894, t. 31, p. 383.

*Borel, G.-Adolphe.* Recherches sur la refraction et la dispersion des radiations ultra-violettes dans quelques substances cristallisées. 1er juillet 1894. Arch. 1895, t. 34, p. 134, 230; en extrait: C. R. 1895, t. 120, p. 1404.

## IV. Lausanne.

### a. Mathematik.

*Wedell, Charlotte.* Application de la théorie des fonctions elliptiques à la solution du problème de Malfatti. Lausanne 1897. Corbaz et Cie.

### b. Physik.

*Schmidt, Werner,* Untersuchungen über die Magnetisierung des Eisens durch sehr kleine Kräfte. Elberfeld 1894. 38 S. 2 Tafeln.

## V. Zürich.

### a. Mathematik und Astronomie.

*Biedermann, W. G. A.*, Über die Principien der Differentialrechnung. 1853. 8°.

*Sidler, G. J.*, Sur les inégalités du moyen mouvement d'Uranus dues à l'action perturbatrice de Neptune. 1854. 8°.

*Suter, H.*, Geschichte der mathematischen Wissenschaften von den ältesten Zeiten bis Ende des XVI. Jahrhunderts. 1871. 8°.

*Amstein, H.*, Über die konforme Abbildung der Oberfläche eines regulären Oktaeders auf die Oberfläche einer Kugel. 1872. 8°.

*Ott, E.*, Ein Problem aus der analytischen Mechanik. 1873. 8°.

*Gysel, J.*, Synthetische Untersuchung eines Orthogonal-Flächensystems. 1874. 4°.

*Affolter, F.*, Beiträge zur geometrischen Theorie der ebenen Kurvenreihen. 1875. 4°.

*Herzog, A.*, Bestimmung einiger specieller Minimalflächen. 1875. 8°.

*Meyer, M. W.*, Über Doppelsterne. 1875. 8°.

*Weith, H.*, Topologische Untersuchung der Kurvenverschlingung. 1876. 8°.

*Beck, A.*, Über die Gestalt des Mondes. 1877. 8°.

*Keller, J.*, Die einander doppelt konjugierten Elemente in allgemeinen reciproken Systemen. 1879. 8°.

*Aeschlimann, U.*, Zur Theorie der ebenen Kurven vierter Ordnung. 1880. 8°.

*Ganter, H.*, Über die Rouletten der Kegelschnitte. 1881. 4°.

*Begel, Ch.*, Centrische Kollineation nter Ordnung in der Ebene vermittelt durch Ähnlichkeitspunkte von Kreisen. 1882. 8°.

*Kiefer, A.*, Der Kontakt höherer Ordnungen bei algebraischen Flächen. 1882. 8°.

*Leuzinger, H.*, Versuch einer Geschichte der Bestimmung parabolischer Bahnelemente von Newton bis Olbers. 1882. 8°.

*Maurer, M. J.*, Die Extinktion des Fixsternlichtes in der Atmosphäre in ihrer Beziehung zur astronomischen Refraktion. 1882. 8°.

*Krieg, F. r.*, Über die eindeutige Beziehung von Räumen mittelst projektiver Ebenenbüschel und ihre Anwendung auf Konstruktionsaufgaben. 1884. 8°.

*Genge, C.*, Beiträge zu graphischen Ausgleichungen. 1887. 8°.

*Odin, A.-A.*, Des maxima et minima de la distance de deux points appartenant respectivement à deux courbes ou surfaces données. 1887. 8°.

*Disteli, M.*, Die Steinerschen Schliessungsprobleme nach darstellend geometrischer Methode. 1888. 8°.

*Leuch, S. R. A.*, Erzeugung und Untersuchung einiger ebenen Kurven höherer Ordnung. 1888. 8°.

*Engel, J. H.*, Konstruktionen zur Geometrie der Flächen zweiter Ordnung und der ebenen Kurven dritter Ordnung. 1889. 8°.

*Hartmann, A.*, Studium über Kegelschnitte und Flächen zweiten Grades. 1889. 8°.

*Stiner, G.*, Über Kurven vom Geschlecht Null. 1890. 8°.

*Schlumberger, Gottfried*, Über n-dimensionale lineare und quadratische Kugelsysteme. 1896.

*Dedoff, Theodor*, Untersuchungen über quadratische Formen. 1896.

*Amberg, Ernst Julius*, Über den Körper, dessen Zahlen sich rational aus zwei Quadratwurzeln zusammensetzen. 1897.

### b. Physik.

*Schoch, W.*, Über die Darstellung der mittlern Jahrestemperatur eines Ortes als Funktion seiner geographischen Länge und Breite. 1856. 8°.

*Röntgen, W. C.*, Studien über Gase. 1869. 8°.

*Mentsik, F.*, Dynamische Theorie und innere Reibung der Gase. 1877. 8°.

*Weber, R.*, Das Wärmeleitungsvermögen von Gneiss und seine Abhängigkeit von der Temperatur. 1878. 8°.

*Kronauer, H.*, Das innere Wärmeleitungsvermögen von Blei, Wismuth und Woods Metall. 1880. 8°.

*Tuchschmid, A.*, Das innere Wärmeleitungsvermögen von Quarz, Kalkspat und Steinsalz. 1883. 8°.

*Kopp, R.*, Untersuchungen über die Gültigkeit des Jouleschen Gesetzes für Elektrolyte. 1885. 8°.

*Stössel, J.*, Über das durch variable Induktionsströme in weichem Eisen inducierte magnetische Moment. 1885. 8°.

*Wuilleumier, H.*, Recherches expérimentales sur l'influence exercée par le milieu ambiant dans les phénomènes d'induction électrodynamique. 1885. 8°.

*Zuber, O.*, Über den Widerstand einiger Metalle gegen stationäre, oscillierende und alternierende elektrische Ströme. 1885. 8°.

*Palaz, A.*, Recherches expérimentales sur la capacité inductive spécifique de quelques diélectriques. 1886. 8°.

*Wyss, G. H. v.*, Eine Methode zur experimentellen Bestimmung des Selbstpotentials einer Spirale. 1886. 8°.

*Göbel, J. B.*, Die wichtigsten Sätze der neueren Statik in elementarer Darstellung. 1887. 8°.

*Blattner, E.*, Der optische Nutzeffekt der Glühlichtlampen. 1886. 8°.

*Behn-Eschenburg, H.*, Untersuchungen über das Giltaysche Eisenelektrodynamometer. 1889. 8°.

*Flatt, R.*, Über die Kanalisation der Elektricität in der elektrischen Beleuchtung. 1889. 8°.

*Sulzberger, K.*, Methode zur Bestimmung der Leitungsfähigkeit verdünnter Elektrolyte mittelst des Kondensators und Untersuchung über die Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes für verdünnte Elektrolyte. 1889. 8°.

*Rössler, G.*, Untersuchungen über die Magnetisierung des Eisens durch sehr kleine und sehr grosse Kräfte. 1892. 8°.

*Fritz, Hans*, Über Wärmeströmung bei elektrischer Polarisation des Glases. 1893.

*Gruner, Paul*, Die Werte der Weberschen Strahlungskonstanten bei zwei verschiedenen Kohlenfäden. 1893.

*Leumann, A.*, Der absolute Wert der Normalkondensatoren von Carpentier und Latimer Clark des eidgen. physikalischen Instituts. 1893. 8°.

*Köffler, Friedrich*, Untersuchungen über die Existenz der objektiven Aberration. 1895.

*Lüdin, Emil*, Die Abhängigkeit der specifischen Wärme des Wassers von der Temperatur. 1895.

*Lombardi, Luigi*, Fenomeni di polarizzazione in un campo electrostatico uniforme. 1895.

*Peterson, Albert*, Über Messungen des Thomsoneffektes. 1895.

*Rawitzer, Joseph*, Untersuchungen über die optische Aktivität in ihrer Beziehung zum Asymmetrieprodukt von Guye. 1896.

*Strauss, Benno v.*, Über die durch Hysteresis im Eisen entwickelte Wärme. 1896.

*Beglinger, Werner*, Das innere Wärmeleitungsvermögen verschiedener Eisensorten. 1896.

*Fleischmann, Lionel*, Über die Induktion im Innern eines stromdurchflossenen cylindrischen Leiters. 1896.

*Cellier, Léon*, Leitungsvermögen der schwarzen Kohle für Wärme und Elektricität. 1896.

Bemerkungen: Nachfolgende Arbeiten haben nicht den Titel «Dissertation», sondern sind wohl bloss an Stelle von solchen als äquivalente Druckschriften eingereicht worden.

*Wild, H.*, Beitrag zur Theorie der Nobilischen Farbenringe. 1857. 4°.

*Lommel, E.*, Einige (nicht genauer bezeichnete) Druckschriften über Physik und Mathematik. 1865.

*Weilenmann, A.*, Über ein abgeändertes Aneroidbarometer und Beziehung zwischen Luftdruck, Temperatur und Höhe in der Atmosphäre. 1875. 8°. — Über die Luftströmungen, insbesondere die Stürme Europas. 1875. 4°. — Über den täglichen Gang der Temperatur in Bern. 1874. 4°.

*Cherbuliez, E.*, Essai historique sur les précurseurs de la théorie des ondes lumineuses. 1863.

*Koppe, C.*, Bestimmung der Achse des Gotthardtunnels. 1877. 8°.

Die freundliche Mithülfe der Herren Professoren *Cailler* und *Soret* in Genf, *H. Amstein* und *H. Dufour* in Lausanne, *K. von der Mühll* in Basel, *A. Meyer* † und *H. Burkhardt* in Zürich, *G. Sidler* in Bern sei hier auf das Beste verdankt.

L. Crelier.

# Sur la fonction Besséliennne de II$^{e}$ espèce $\overset{n}{S}_{(x)}$.

(Eingereicht im Dezember 1896.)

L'étude de la fonction:

$$\frac{1}{x-y} = \int_0^{x-y} e^{-(x-y)s}\, ds$$

conduit à la formule connue:

$$\frac{1}{x-y} = \overset{0}{J}(y)\,\frac{1}{x} + \sum_1^{\infty} \overset{n}{J}(y) \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left(t^n + (-1)^n\, t^{-n}\right) ds \text{ *)}$$

où $s = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$. $\overset{0}{J}(y)$ et $\overset{n}{J}(y)$ sont des fonctions Besséliennes de 1$^{re}$ espèce.

L'intégrale:

$$\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left(t^n + (-1)^n\, t^{-n}\right) ds$$

*) Mathem. Annalen, III, p. 138.

représente la fonction $\overset{n}{O}(x)$*), une des intégrales Besséliennes de 2me espèce. Mise en sommation, elle devient:

$$\overset{n}{O}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda < \frac{n+1}{2}} \frac{n}{4} \frac{(n-\lambda-1)!}{2!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n+1-2\lambda}$$

Cette formule élégante a été introduite dans le calcul par M. Neumann, en partant de l'intégrale précédente.

Dans notre thèse de doctorat, nous avons présenté un nouveau développement de cette formule par sommation.

En appliquant la formule de l'intégration par parties,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

on peut écrire:

$$\overset{n}{O}(x) = \frac{\cos^2 n\frac{\pi}{2}}{x} + \frac{n}{2x} \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left(t^n - (-1)^n\, t^{-n}\right)\frac{dt}{t}\ **)$$

La nouvelle intégrale représente la fonction $\overset{n}{S}(x)$, fonction Bessélienne de 2me espèce. Pour en obtenir la formule par sommation, on l'a simplement comparée à $\overset{n}{O}(x)$ et l'on a déduit la nouvelle forme.

Mais, nous ferons remarquer que l'intégrale

$$\int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left(t^n - (-1)^n\, t^{-n}\right)\frac{dt}{t} \qquad (1.)$$

soumise à un mode de représentation analogue à celui que nous avons employé pour

$$\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left(t^n + (-1)^n\, t^{-n}\right) ds,\ ***)$$

et traitée ensuite par *la théorie des fractions continues*, est susceptible d'un développement particulier en une formule par sommation. Dans le travail ci-dessous, nous nous proposons de développer cette transformation.

---

*) *C. Neumann*, Bessel'sche Funktionen, p. 9.

**) *C. Neumann*, Bessel'sche Funktionen.

***) Voir: *L. Crelier* «Thèse de doctorat».

I.

Posons:

$$s = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \text{ et}$$

$$T_n = t^n + (-1)^n t^{-n}.$$

Voyons ce devient le produit

$$2s\,T_n = \left(t + \frac{1}{t}\right)\left(t^n + (-1)^n t^{-n}\right)$$

$$2s\,T_n = \underbrace{t^{n+1}}_{\text{I.}} \underbrace{+ t^{n-1} + (-1)^n t^{-n+1}}_{\text{II.}} \underbrace{+ (-1)^n t^{-n-1}}_{\text{III.}}$$

Les parties I et III donnent: $t^{n+1} + (-1)^n t^{-(n+1)}$

$$= t^{n+1} + (-1)^{n+1} t^{-(n+1)}$$

$$= T_{n+1}$$

La partie II donne: $-t^{n-1} + (-1)^n t^{-n+1}$

$$= -t^{n-1} + (-1)^{n-1} t^{-(n-1)}$$

$$= -T_{n-1}.$$

Donc

$$2s\,T_n = T_{n+1} - T_{n-1}; \qquad (2.)$$

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = 2s + \frac{T_{n-1}}{T_n}$$

$$= 2s + \frac{1}{\dfrac{T_n}{T_{n-1}}}.$$

Mais on a aussi

$$2s\,T_{n-1} = T_n + T_{n-2},$$

et

$$\frac{T_n}{T_{n-1}} = 2s + \frac{1}{\dfrac{T_{n-1}}{T_{n-2}}};$$

en appliquant la formule de récurrence (2) à ce nouveau quotient, et en continuant le développement on arrivera à:

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = 2s + \cfrac{1}{2s + \cfrac{1}{2s + \cfrac{1}{2s + \cfrac{1}{2s + \cfrac{1}{\frac{T_2}{T_1}}}}}}$$

$$T_2 = t^2 - (-1)^2 t^{-2} = t^2 - \frac{1}{t^2}$$

$$T_1 = t - (-1)^1 t^{-1} = t + \frac{1}{t}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{t^2 - t^{-2}}{t + t^{-1}} = \frac{(t + t^{-1})(t - t^{-1})}{(t + t^{-1})} = (t - t^{-1}) = 2s.$$

Donc

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = 2s + \cfrac{1}{2s + \cfrac{1}{2s + \cfrac{1}{2s + \cfrac{1}{2s + \cfrac{1}{2s}}}}}$$

C'est une fraction continue à n quotients incomplets égaux tous à 2 s.

D'après les théories et notations de *M. le Prof. Dr. J. H. Graf*)*, nous écrivons :

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{\left[\overbrace{2s, 2s, \ldots\ldots, 2s}^{n \text{ termes}}\right]}{\left[\underbrace{2s, 2s, \ldots\ldots, 2s}_{n-1 \text{ termes}}\right]} \qquad (3.)$$

Le numérateur a n termes et le dénominateur n — 1 termes et cette fraction est la n$^{e}$ réduite de la fraction continue précédente. C'est donc sa valeur même.

---

*) Voir: «*J. H. Graf. — Relations entre la fonction Bessélienne de 1re espèce et une fraction continue*».

«Annali di Matematica». Milan, 1895, *et notre thèse.*

Rappelons:

$$f_n(a, b) = \Big[a,\ a + b,\ a + 2b,\ \ldots\ \ldots\ \ldots,\ a - (n-1)b\Big]$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda < \frac{n+1}{2}} \binom{n-\lambda}{\lambda} (a + \lambda b)\,(a + (\lambda+1)b)$$

$$\ldots\ldots\,(a - (n - \lambda - 1)b)$$

En posant

$$a = 2s \text{ et } b = 0$$

nous aurons

$$f_n(2s, 0) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda < \frac{n+1}{2}} \binom{n-\lambda}{\lambda} (2s)^{n-2\lambda} \qquad (4.)$$

et

$$f_n(2s, 0) = \Big[\underbrace{2s,\ 2s,\ 2s,\ \ldots\ldots,\ 2s}_{n \text{ termes}}\Big]$$

Appliquons à la formule (3), nous aurons

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{f_n(2s, 0)}{f_{n-1}(2s, 0)} \qquad (5.)$$

De cette proportion, nous pouvons conclure que le dénominateur $T_n$ est égal au dénominateur $f_{n-1}(2s, 0)$, à une constante près.

Donc $\qquad T_n = \text{Const. } f_{n-1}(2s, 0)$

Pour déterminer C, faisons $n = 2$, d'où

$$T_2 = C.\, f_1(2s, 0)$$

Mais $T_2 = t^2 - t^{-2}$

et $\qquad f_1(2s, 0) = 2s = t - t^{-1}$

D'où $\qquad t^2 - t^{-2} = C.\,(t - t^{-1})$

$$C = (t + t^{-1})$$

Donc:

$$T_n = (t + t^{-1})\, f_{n-1}(2s, 0) \qquad (6.)$$

Reportons nous à la valeur de l'intégrale (1)

$$\int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left(t^n - (-1)^n t^{-n}\right) \frac{dt}{t} = S^n(x).$$

Nous pouvons l'écrire :

$$S^n(x) = \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, T_n\, \frac{dt}{t}$$

En introduisant la valeur (6) on obtient :

$$S^n(x) = \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \left(t+\frac{1}{t}\right) f_{n-1}(2s, 0)\, \frac{dt}{t}$$

$$= \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \frac{t+\frac{1}{t}}{t}\, f_{n-1}(2s, 0)\, dt$$

$$S^n(x) = \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \left(1+\frac{1}{t^2}\right) f_{n-1}(2s, 0)\, dt. \qquad (7.)$$

Reprenons

$$s = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$$

$$2s = \left(t - \frac{1}{t}\right).$$

La différentiation donne :

$$2\, ds = dt \left(1 + \frac{1}{t^2}\right).$$

En substituant la variable s, dans (7) la limite inférieure devient

$$s = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{1}\right) = 0$$

$$s = 0.$$

La limite supérieure reste très grande, voisine de l'infini ; on écrit :

$$S^n(x) = 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, f_{n-1}(2s, 0)\, ds. \qquad (7^{bis})$$

Substituons ici la valeur (4) pour $f_{n-1}(2s, 0)$. Nous aurons :

$$S^n(x) = 2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \sum_{\lambda=0}^{\lambda \leq \frac{n}{2}} \binom{n-1-\lambda}{\lambda} 2s^{n-1-2\lambda}$$

Faisons passer les termes indépendants de devant le signe $\int$ et développons

$$S^n(x) = 2 \sum_{\lambda=0}^{\lambda \leq \frac{n}{2}} \frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda!\,(n-1-2\lambda)!} \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} (2s)^{n-1-2\lambda}\, ds ;$$

$$\text{posons } xs = u ; \; ds = \frac{1}{x}\, du :$$

$$S^n(x) = 2 \sum_{\lambda=0}^{\lambda \leq \frac{n}{2}} \frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda!\,(n-1-2\lambda)!} \cdot \frac{2^{n-1-2\lambda}}{x^{n-1-2\lambda}} \cdot \frac{1}{x} \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-u} u^{n-1-2\lambda}\, du$$

$$S^n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda \leq \frac{n}{2}} \frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda!\,(n-1-2\lambda)!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2\lambda} \int_0^{\frac{N}{x}} -u\, u^{n-1-2\lambda}\, du. \quad (8.).$$

Mais les fonctions Eulériennes donnent :

$$\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-u} u^{n-1-2\lambda}\, du = \Gamma_{(n-2\lambda)} = (n-1-2\lambda)!$$

En introduisant dans (8), il reste :

$$S^n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda \leq \frac{n}{2}} \frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2\lambda} \qquad (9.)$$

Cette formule (9) est identique à la formule par sommation déduite d'une comparaison entre les deux fonctions

$$O^n(x) \text{ et } S^n(x).$$

## Sur la somme $S^{n+1}(x) + S^{n-1}(x)$ et sur la différence $S^{n-1}(x) - S^{n+1}(x)$.

I.

Rappelons la formule

$$O^n(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s, 0)\, ds + \int_0^{\sqrt{x}} e^{-xs}\, f_{n-2}(2s, 0)\, ds\ ^*)$$

$$= \int_0^{\sqrt{x}} e^{-xs} \left\{ s\, f_{n-1}(2s, 0) + f_{n-2}(2s, 0) \right\} ds$$

et la formule ($7^{bis}$) du paragraphe précédent

$$S^n(x) = 2 \int_0^{\sqrt{x}} e^{-xs}\, f_{n-1}(2s, 0).$$

Changeons $n$ en $n - 1$ et en $n + 1$ dans cette dernière formule. Nous aurons alors:

$$S^{n+1}(x) = 2 \int_0^{\sqrt{x}} e^{-xs}\, f_n(2s, 0)\, ds$$

$$S^{n-1}(x) = 2 \int_0^{\sqrt{x}} e^{-xs}\, f_{n-2}(2s, 0)\, ds.$$

Si nous tenons compte de la relation (4) du travail précité de *M. le Prof. J. H. Graf* nous aurons:

$$f_n(2s, 0) = 2s\, f_{n-1}(2s, 0) + f_{n-2}(2s, 0).$$

Introduisons cette valeur dans $S^{n+1}(x)$ et cette formule deviendra:

$$S^{n+1}(x) = 2 \int_0^{\sqrt{x}} e^{-xs} \left\{ 2s\, f_{n-1}(2s, 0) + f_{n-2}(2s, 0) \right\} ds$$

*) *Ls. Crelier*: Sur quelques propriétés des fonctions Besséliennes «Annali di Matematica» tome 24 (1896) (§ VI, formule 7.)

ou

$$S^{n+1}(x) = 4\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s,0)\, ds + 2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} f_{n-2}(2s,0)\, ds. \quad (\alpha).$$

D'autre part $S^{n-1}(x) = 2\int_0^{N} e^{-xs} f_{n-2}(2s,0)\, ds,$

l'addition donne alors:

$$S^{n+1}(x) + S^{n-1}(x) = 4\int_0^{N} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s,0)\, ds +$$

$$4\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} f_{n-2}(2s,0)\, ds$$

$$= 4\int e^{-xs}\left\{s\, f_{n-1}(2s,0) + f_{n-2}(2s,0)\right\} ds.$$

Comparé avec la valeur de $O^n(x)$, ce résultat s'écrit:

$$S^{n+1}(x) + S^{n-1}(x) = 4\ O^n(x). \qquad (1.)$$

II.

La valeur $(\alpha)$ de $S^{n+1}(x)$ peut aussi s'écrire:

$$S^{n+1}(x) = 4\int_0^{N} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s,0) + S^{n-1}(x)$$

Faisons passer $S^{n-1}(x)$ de l'autre côté du signe égal et nous aurons:

$$S^{n+1}(x) - S^{n-1}(x) = 4\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s,0)\, ds. \quad (\beta).$$

Le membre de droite de cette *nouvelle relation* n'est autre chose que la I^re^ intégrale dans le développement de $O^n(x)$.

La formule (6) de la Ire partie:

$$T_n = (t + t^{-1})\ f_{n-1}\ (2s, 0), \qquad \text{donne:}$$

$$f_{n-1}(2s, 0) = \frac{1}{t + t^{-1}}, \quad T_n = \frac{1}{(t + t^{-1})} \left\{ t^n - (-1)^n\ t^{-n} \right\}.$$

Introduisons cette valeur dans la relation ($\beta$); celle-ci deviendra

$$S^{n+1}(x) - S^{n-1}(x) = 4 \int_0^N e^{-xs} \left\{ \frac{s}{t + t^{-1}} \right\} \left\{ t^n - (-1)^n\ t^{-n} \right\} ds;$$

nous avons eu $s = \frac{1}{2}(t - t^{-1})$

$$\text{et } ds = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$$

En substituant ces valeurs dans l'intégrale ci-dessus, la nouvelle variable devient t, et la limite inférieure

$$s = 0 \text{ donne } 0 = \frac{1}{2}(t - t^{-1})$$

$$\text{d'où } \underline{t = 1}$$

La limite inférieure est 1, et la formule précédente s'écrit:

$$S^{n+1}(x) - S^{n-1}(x) = \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \left( \frac{t - t^{-1}}{t + t^{-1}} \right) (1 + t^{-2}) \left\{ t^n - (-1)^n\ t^{-n} \right\} dt$$

ou

$$S^{n+1}(x) - S^{n-1}(x) = \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs} (t - t^{-1}) \left\{ t^n - (-1)^n\ t^{-n} \right\} \frac{dt}{t} \ (\gamma).$$

La valeur de $S^n(x)$ nous a donné:

$$S^n(x) = \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \left( t^n - (-1)^n\ t^{-n} \right) \frac{dt}{t} \quad *)$$

avec $s = \frac{1}{2}(t - t^{-1})$ comme plus haut.

*) *Neumann*, Bessel'sche Funktionen. (Leipzig, 1867.)

En différentiant suivant x, nous aurons

$$\frac{\delta S^n(x)}{\delta x} = \int_1^{\frac{N}{x}} \frac{\delta}{\delta x} e^{-xs} \left\{ t^n - (-1)^n t^{-n} \right\} \frac{dt}{t}$$

$$= \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs} (-s) \left\{ t^n - (-1)^n t^{-n} \right\} \frac{dt}{t}$$

$$= -\frac{1}{2} \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \left(t - t^{-1}\right) \left(t^n - (-1)^n t^{-n}\right) \frac{dt}{t}.$$

D'où

$$\int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \left(t - t^{-1}\right) \left(t^n - (-1)^n t^{-n}\right) \frac{dt}{t} = -2 \frac{\delta S^n(x)}{\delta x}.$$

Introduite dans ($\gamma$) cette valeur nous conduit à l'intéressante relation

$$S^{n+1}(x) - S^{n-1}(x) = -2 \frac{\delta S^n}{\delta x}$$

que l'on peut aussi écrire

$$S^{n-1}(x) - S^{n+1}(x) = 2 \frac{\delta S^n}{\delta x}. \qquad (2.)$$

Ces formules (1) et (2) sont déjà connues mais en déduction de raisonnements tout à fait différents.

## III.

La valeur $\frac{\delta S^n}{\delta x}$ à laquelle nous venons d'arriver, peut donc s'écrire :

$$\frac{\delta S^n}{\delta x} = -2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \, s. \, f_{n-1}(2s, 0) \, ds. \qquad (3.)$$

en remontant à la formule ($\beta$) dont nous sommes partis.

Le développement par sommation de cette intégrale, nous est connu et donne :

$$\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s, 0)\, ds = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}} \frac{1}{4} \cdot \frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda!} (n-2\lambda) \left(\frac{2}{x}\right)^{n+1-2\lambda}.$$

Donc :

$$\frac{\partial S^n(x)}{\partial x} = -\frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}} \frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda!} (n-2\lambda) \left(\frac{2}{x}\right)^{n+1-2\lambda} \quad (4.)$$

Nous ferons remarquer que cette valeur (4) peut aussi s'écrire directement en différentiant suivant x :

$$S^n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}} \frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2\lambda}.$$

(C'est la formule (9) de la première partie de cette note.)

En tenant compte de la valeur (3) pour $\frac{\partial S^n}{\partial x}$, et de celle de $O^n(x)$ :

$$O^n x = \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s, 0)\, ds + \int_0^{\frac{N}{x}} f_{n-2}(2s, 0)\, ds,$$

$$\frac{\partial S^n}{\partial x} = -2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s, 0)\, ds.$$

$$S^n = 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, f_{n-1}(2s, 0)\, ds, \text{ nous aurons :}$$

$$O^n(x) = \frac{1}{2} S^{n-1}(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial S^n}{\partial x} \quad (5.)$$

Si nous considérons les deux relations (1) et (2)

$$S^{n+1}(x) + S^{n-1}(x) = 4\,O^n$$

$$S^{n-1}(x) - S^{n+1}(x) = 2\,\frac{\partial S^n}{\partial x}$$

par addition, elles donnent une valeur de $O^n(x)$ identique à (5) celle donnée plus haut, soit:

$$O^n(x) = \frac{1}{2}\left(S^{n-1}(x) - \frac{\partial S^n}{\partial x}\right);$$

par soustraction, elles donnent encore

$$O^n(x) = \frac{1}{2}\left\{S^{n+1}(x) + \frac{\partial S^n}{\partial x}\right\} \qquad (6.)$$

## IV.

Revenons à la formule modifiée de ($\alpha$) au § II

$$S^{n+1}(x) = 4\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s,\ 0)\, ds + S^{n-1}(x)$$

et à ($\beta$): $S^{n+1}(x) - S^{n-1}(x) = 4\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s,\ 0)\, ds$

et étudions l'intégrale qui forme le membre de droite.

Nous connaissons:

$$f_{n-1} = 2\,s\,f_{n-2} - f_{n-3}.$$

Cette nouvelle valeur nous permet d'écrire:

$$-2\,\frac{\partial S^n}{\partial x} = 4\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s,\ 0)\, ds = 4\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\cdot s\left((2s\, f_{n-2}(2s, 0) + f_{n-3}(2s,\ 0)\right) ds$$

$$= 8\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s^2\, f_{n-2}(2s,\ 0)\, ds + 4\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\cdot s\, f_{n-3}(2s,\ 0)\, ds.$$

La dernière partie est égale à

$$-2\,\frac{\delta S^{n-2}}{\delta x}.$$

Voyons ce que donne la I^re^ partie:

$$\text{prenons } \frac{\delta S^n}{\delta x} = -2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s,\,0)\,ds$$

et différentions encore une fois suivant x. On peut le faire sans remplacer s par sa valeur en fonction de t. Nous obtenons

$$\frac{\delta^2 S^n}{\delta x^2} = -2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\,(-s)\, s\, f_{n-1}(2s,\,0)\,ds$$

$$= +2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s^2\, f_{n-1}(2s,\,0)\,ds.$$

Avec n changé en n — 1, nous avons:

$$\frac{\delta^2 S^{n-1}}{\delta x^2} = 2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s^2\, f_{n-2}(2s,0)\,ds. \qquad (7.)$$

Nous avons alors:

$$-2\,\frac{\delta S^n}{\delta x} = 4\,\frac{\delta^2 S^{n-1}}{\delta x^2} - 2\,\frac{\delta S^{n-2}}{\delta x} \text{ ou}$$

$$-\frac{\partial S^n}{\delta x} = 2\,\frac{\partial^2 S^{n-1}}{\partial x^2} - \frac{\delta S^{n-2}}{\partial x} \qquad (8.)$$

En traitant de même la formule:

$$-\frac{\partial S^{n-2}}{\partial x} = 2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-3}(2s,0)\,ds,$$

nous aurons: $-\dfrac{\partial S^{n-2}}{\partial x} = 2\,\dfrac{\partial^2 S^{n-3}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial S^{n-4}}{\partial x}$

Nous écrivons la *nouvelle relation :*

$$\frac{\partial S^{n-2}}{\partial x} - \frac{\partial S^n}{\partial x} = 2\,\frac{\partial^2 S^{n-1}}{\partial x^2}. \qquad (8^{bis})$$

Cette formule, donnant la différence de deux dérivées simples, prouve que la relation $S^{n-2} - S^n = 2 \cdot \partial S^{n-1}$ est aussi valable quand on en prend la dérivée par rapport à x.

Remplaçons ensuite dans (8) la dernière dérivée simple par une dérivée seconde suivant (8)$^{bis}$ et nous aurons:

$$\frac{\partial S^n}{\partial x} = -2\left\{\frac{\partial^2 S^{n-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S^{n-3}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S^{n-5}}{\partial x^2} + \cdots\cdots\right\};$$

arrêtons nous aux termes en $S^0$ ou $S^1$ dont les valeurs sont très simples, afin de ne pas arriver aux fonctions S (x) à indices négatifs. $\frac{\partial S^n(x)}{\partial x}$ ou la première dérivée de $S^n(x)$ apparaît clairement comme une sommation des deuxièmes dérivées de fonctions S (x).

Pour développer cette sommation nous considérerons 2 cas avec *n pair* ou avec *n impair*.

*I. cas. n pair.* On a dans ce cas:

$$\frac{\partial S^n}{\partial x} = -2\left\{\frac{\partial^2 S^{n-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S^{n-3}}{\partial x^2} + \cdots\cdots + \frac{\partial^2 S^1}{\partial x^2}\right\} + \frac{\partial S^0}{\partial x}$$

$$\text{car } -\frac{\partial S^2}{\partial x} = 2\frac{\partial^2 S^1}{\partial x} - \frac{\partial S^0}{\partial x}$$

$$S^0(x) = 0, \quad \frac{p\, S^0}{\partial x} = 0$$

n étant diminué de 1, 3, 5 etc., les indices des 2$^{mes}$ dérivées sont des nombres impairs; le dernier est donc 1 et le premier n — 1. Nous pouvons alors écrire:

$$\frac{\partial S^n}{\partial x} = -2\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{n-2}{2}} \frac{\partial^2 S^{2\lambda+1}}{\partial x^2} \qquad (9.)$$

*II$^e$ cas. n impair.* Ici, les indices des deuxièmes dérivées sont des nombres pairs et comme

$$-\frac{\partial S^3}{\partial x} = +2\frac{\partial^2 S^2}{\partial x^2} - \frac{\partial S^1}{\partial x},$$

nous pourrons écrire notre série sous la forme:

$$\frac{\partial S^n}{\partial x} = -2\left\{\frac{\partial^2 S^{n-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S^{n-3}}{\partial x^2} + \cdots\cdots + \frac{\partial^2 S^2}{\partial x^2}\right\} + \frac{\partial S^1}{\partial x}$$

$$S^1(x) = \frac{2}{x} = 2x^{-1}; \quad \frac{\partial S^1}{\partial x} = -2x^{-2} = -\frac{2}{x^2}.$$

D'où

$$\frac{\partial S^n}{\partial x} = -2\left\{\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial^2 S^{2\lambda}(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{x^2}\right\} \qquad (9^{bis})$$

Les formules (9) et ($9^{bis}$) nous donnent le développement cherché.

En posant dans (9) $n = 2p$ et $n = 2p-1$ dans $9^{(bis)}$ et en additionnant nous obtiendrons

$$\left(\frac{\partial S^{2p}}{\partial x} + \frac{\partial S^{2p-1}}{\partial x}\right) = -2\left[\frac{\partial^2 S^{2p-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S^{2p-2}}{\partial x^2} + \cdots\cdots\right.$$

$$\left. \cdots + \frac{\partial^2 S^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S^1}{\partial x^2} + \frac{1}{x^2}\right]$$

$$\frac{\partial S^{2p}}{\partial x} + \frac{\partial S^{2p-1}}{\partial x} = -2\left\{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=2p-1} \frac{\partial^2 S^{\lambda}}{\partial x^2} + \frac{1}{x^2}\right\}$$

Nous arrivons de cette façon à la somme de dérivées premières de fonctions consécutives.

Ce résultat se présenterait sous la même forme en prenant $n = 2p+1$ avec $n = 2p$.

Donc:

$$-\left(\frac{\partial S^n}{\partial x} + \frac{\partial S^{n-1}}{\partial x}\right) = +\frac{2}{x^2} + 2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1} \frac{\partial^2 S^{\lambda}}{\partial x^2}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S^n}{\partial x} + \frac{\partial S^{n-1}}{\partial x}\right) = \frac{1}{x^2} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1} \frac{\partial^2 S^{\lambda}}{\partial x^2}. \quad (10.)$$

Les formules (9) et ($9^{bis}$) peuvent se réunir en une seule de la forme

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial S^n}{x} = \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{2}}{x^2} + \sum_{0}^{\lambda<\frac{n-1}{2}} \frac{\partial^2 S^{n-(2\lambda+1)}(x)}{\partial x^2} \quad (11.)$$

Car $\lambda$ étant toujours entier on a, à la limite inférieure: $\frac{\partial^2 S^{n-1}}{\partial x^2}$

et à la limite supérieure $\frac{\partial S^2}{\partial x^2}$ avec n impair, ou $\frac{\partial^2 S^1}{\partial x^2}$ avec n pair;

en outre $\frac{\sin^2 \frac{n\pi}{2}}{x^2}$ donne avec n pair $\frac{\sin^2 p\pi}{x^2} = 0$ et avec n impair

$$\frac{\sin^2 (2p+1)\frac{\pi}{2}}{x^2} = \frac{(-1)^{2p}}{x^2} = \frac{1}{x^2}.$$

La relation (11) établit ainsi la valeur d'une dérivée simple en fonction des dérivées secondes des fonctions d'indices inférieurs.

## V.

D'un autre côté nous connaissons la formule $S^{n-1}_{(x)} - S^{n+1}_{(x)} = 2\frac{\partial S^n}{\partial x}$; cette formule est donc égale à

$$S^{n-1}(x) - S^{n+1}(x) = -4\left(\frac{\sin^2 \frac{n\pi}{2}}{x^2} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n-1}{2}} \frac{\partial^2 S^{n-(2\lambda+1)}(x)}{\partial x^2}\right) \tag{12.}$$

On peut aussi écrire

$$-S^{n+1}(x) = \frac{2\partial S^n}{\partial x} - S^{n-1}(x);$$

nous savons que cette formule est générale; elle nous conduira donc à la somme d'une suite de dérivées premières pour la valeur d'une fonction simple $S^n(x)$. Soit:

$$-S^{n+1}(x) = \frac{2\partial S^n(x)}{\partial x} + \frac{2\partial S^{n-2}(x)}{\partial x} + \frac{2\partial S^{n-4}(x)}{\partial x} + \cdots$$

Pour former cette suite en une sommation à terme général, nous considérerons 2 cas, un avec *n pair* et un avec *n impair*.

*I^er cas*: *n pair*. Le dernier terme sera de la forme

$$\frac{2\partial S^2(x)}{\partial x} - S^1(x) = -S^3(x). \quad S^1(x) = \frac{2}{x}.$$

Donc on aura:

$$-S^{n+1}(x) = -\frac{2}{x} + 2\sum_{1}^{\lambda=\frac{n}{2}} \frac{\partial S^{2\lambda}(x)}{\partial x}. \tag{13.}$$

*II^me cas. n impair.* La somme devra s'arrêter ici à

$$\frac{2\,\partial S^1(x)}{\partial x} - S^0(x).$$

Faisons remaquer que nous ne prolongeons pas nos sommes plus loin, simplement pour ne pas obtenir de termes négatifs.

Notre second cas donnera

$$-S^{n+1}(x) = \frac{2\,\partial S^n(x)}{\partial x} + \frac{2\,\partial S^{n-2}(x)}{\partial x} + \cdots + \frac{2\,\partial S^1(x)}{\partial x} - S^0(x).$$

$S^0(x) = 0.$

Donc

$$-S^{n+1}(x) = 2\sum_{0}^{\lambda=\frac{n-1}{2}} \frac{\partial S^{2\lambda+1}(x)}{\partial x}. \qquad (13^{bis})$$

Nous avons obtenu de cette façon les deux sommations pour les fonctions $S^n(x)$, suivant qu'elles sont paires ou impaires.

Prenons maintenant deux fonctions consécutives n et n — 1 et formons la suite des dérivées premières correspondantes. Quelle que soit leur parité, la 1^re des dérivées sera $\frac{\partial S^{n-1}}{\partial x}$, la dernière $\frac{\partial S^1}{\partial x}$ et le dernier terme de la somme: $-\frac{2}{x}$, car nous avons 2 fonctions dont une paire et une impaire, et la fonction paire finit avec $-\frac{2}{x}$.

$$-\left(S^n(x) + S^{n-1}(x)\right) = \frac{2\,\partial S^{n-1}(x)}{\partial x} + \frac{2\,\partial S^{n-2}(x)}{\partial x} + \cdots + \frac{2\,\partial S^1(x)}{\partial x} - \frac{2}{x}$$

$$S^n(x) + S^{n-1}(x) = +\frac{2}{x} - 2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1} \frac{\partial S^\lambda(x)}{\partial x} \qquad (14.)$$

Cette formule présente une harmonie parfaite avec la formule (10) en $\frac{\partial^2 S^\lambda}{\partial x}$ de même que les formules (13) et $(13)^{bis}$ avec les formules (9) et $(9)^{bis}$.

Les formules (13) et (13)$^{bis}$ peuvent aussi se grouper en une seule sommation qui sera:

$$-\frac{1}{2}S^n(x) = -\frac{\sin^2\frac{n\pi}{2}}{x} + \sum_{0}^{\lambda<\frac{n-1}{2}} \frac{\partial S^{n-(2\lambda+1)}(x)}{\partial x} \quad (15.)$$

La limite supérieure donnera suivant que n sera pair ou impair $\partial S^1$ ou $\partial S^2$ et la limite inférieure donnera toujours $\partial S^{n-1}$.

Développons maintenant $S^n(x)$ sous une double sommation de dérivées secondes. Nous considérons encore 2 cas avant de prendre le cas général.

*I$^{er}$ cas. n pair.*

La relation (13$^{bis}$) nous donne:

$$S^n(x) = -2 \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{n-2}{2}} \frac{\partial S^{2\lambda+1}(x)}{\partial x}$$

Les fonctions dont on doit prendre les dérivées premières sont les fonctions impaires inférieures à n.

La relation (9$^{bis}$) nous donne pour ce cas:

$$\frac{\partial S^n(x)}{\partial x} = -2\left[\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{n-1}{2}} \frac{\partial^2 S^{2\lambda}(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{x^2}\right]$$

$$\frac{\partial S^{2\lambda+1}(x)}{\partial x} = -2\left[\sum_{\mu=1}^{\mu=\lambda} \frac{\partial^2 S^{2\mu}(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{x^2}\right]$$

Donc chaque terme de $S^n(x)$ étant une sommation, $S^n(x)$ sera la sommation de ces sommations.

$$S^n(x) = -2\sum - 2\left(\Sigma + \frac{1}{x^2}\right)$$

Chaque terme dans la sommation étant affecté du facteur — 2. celui-ci peut passer devant et l'on a

$$S^n(x) = 4\sum\left(\Sigma + \frac{1}{x^2}\right)$$

Le terme $\frac{1}{x^2}$ est pris autant de fois que la grande sommation comporte de termes, car toutes les dérivées qui forment cette grande sommation sont une autre sommation plus $\frac{1}{x^2}$.

On a $\frac{n-2}{2} + 1$ ou $\frac{n}{2}$ termes et $\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{n}{2x^2}$.

Donc:

$$S^n(x) = \frac{2n}{x^2} + 4 \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{n-2}{2}} \sum_{\mu=1}^{\mu=\lambda} \frac{\partial^2 S^{2\mu}(x)}{\partial x^2}. \qquad (16.)$$

*II^me cas. n impair.*

$$S^n(x) = \frac{2}{x} - 2 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{n-1}{2}} \frac{\partial S^{2\lambda}}{\partial x}$$

donne la valeur de S pour notre cas:

Ensuite

$$\frac{\partial S^{2\lambda}}{\partial x} = -2 \sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda-1} \frac{\partial^2 S^{2\mu+1}}{\partial x^2}.$$

Ce qui nous permet d'écrire directement

$$S^n(x) = \frac{2}{x} + 4 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{n-1}{2}} \sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda-1} \frac{\partial^2 S^{2\mu+1}}{\partial x^2} \qquad (17.)$$

Pour établir une formule générale, considérons les deux formules relatives à $S^n$ et $\partial S^n$ obtenues aux numéros (11) et (15). Soit

$$S^n(x) = \frac{2 \sin^2 \frac{n\pi}{2}}{x} - 2 \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n-1}{2}} \frac{\partial S^{n-(2\lambda+1)}(x)}{\partial x},$$

dans (11) remplaçons n par $n - 2\lambda - 1$, nous aurons

$$\frac{\partial S^{n-2\lambda-1}(x)}{\partial x} = -2 \left( \frac{\sin^2 \frac{(n-2\lambda-1)\pi}{2}}{x^2} + \sum_{\mu=0}^{\mu<\frac{n}{2}-\lambda-1} \frac{\partial^2 S^{n-2\lambda-2\mu-2}(x)}{\partial x^2} \right)$$

Introduite dans la 1e sommation, cette valeur nous donne, en tenant compte de ce que la valeur $\sin^2 (n-2\lambda-1)\frac{\pi}{2}$ s'annule pour *n impair*, et encore de ce que, quand *n* est *pair*, la 1e somme comporte $\frac{n}{2}$ termes:

$$S^n(x) = \frac{2\sin^2\frac{n\pi}{2}}{x} + 4\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{\sin^2(n-1)\frac{\pi}{2}}{x^2} + 4\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n-1}{2}}\sum_{\mu=0}^{\mu<\frac{n}{2}-(\lambda+1)}\frac{\partial^2 S^{n-2\lambda-2\mu-2}}{\partial x^2} \quad (18)$$

Telle sera notre formule générale pour $S^n(x)$, *n* étant pair ou impair.

## Sur la somme $O^{n+1}(x) + O^{n-1}(x)$ et la différence $O^{n-1}(x) - O^{n+1}(x)$.

### I.

La relation (1) dans le chapitre précédent donne:

$$4\,O^{n+1}(x) = S^{n+2}(x) + S^n(x)$$

ou

$$4\,O^{n-1}(x) = S^n(x) + S^{n-2}(x).$$

L'addition nous amène à

$$4\left(O^{n+1}(x) + O^{n-1}(x)\right) = S^{n+2}(x) + 2\,S^n(x) + S^{n-2}(x).$$

En introduisant la valeur de $S^n(x)$:

$$S^n(x) = 2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} f_{n-1}(2s, 0)\,ds$$

dans les diverses fonctions S, nous obtenons:

$$4\left(O^{n+1}(x) + O^{n-1}(x)\right) = 2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left\{f_{n+1}(2s, 0) + 2 f_{n-1}(2s, 0) + f_{n-3}(2s, 0)\right\} ds$$

On sait que: $f_{n+1}(2s, 0) = 2s\, f_n(2s, 0) + f_{n-1}(2s, 0)$

$f_{n+1}(2s, 0) + 2 f_{n-1} + f_{n-3}(2s, 0)$ devient avec cette valeur:

$$2s\, f_n(2s, 0) + 3 f_{n-1}(2s, 0) + f_{n-3}(2s, 0)$$

Faisons : $f_n = 2s\, f_{n-1} + f_{n-2}$

et introduisons, nous aurons :

$$4s^2 f_{n-1} + 3 f_{n-1} + \underbrace{2s f_{n-2} + f_{n-1}}_{= f_{n-1}}.$$

Les deux derniers termes représentant $f_{n-1}$, la somme devient alors

$$4s^2 f_{n-1} + 4 f_{n-1} \text{ ou } 4\,(s^2 f_{n-1} + f_{n-1}).$$

D'où

$$4\,(0^{n+1}(x) + 0^{n-1}(x)) = 8 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}(s^2+1)\, f_{n-1}(2s, 0)\, ds,$$

$$0^{n+1}(x) + 0^{n-1}(x) = 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}(s^2+1)\, f_{n-1}(2s, 0)\, ds.$$

Pour trouver la valeur de l'intégrale précédente posons :

$$S^n(x) = 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} f_{n-1}(2s,0)\, ds,$$

$$\frac{\partial S^n}{\partial x} = -2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s, 0)\, ds,$$

$$\frac{\partial^2 S^n}{\partial x^2} = +2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} s^2 f_{n-1}(2s, 0)\, ds.$$

Ce mode de représentation nous permet d'écrire

$$\frac{\partial^2 S^n(x)}{\partial x^2} + S^n(x) = 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s^2 f_{n-1}(2s, 0)\, ds$$

$$+ 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} f_{n-1}(2s, 0)\, ds$$

$$= 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}(s^2+1) f_{n-1}(2s, 0)\, ds.$$

D'où nous tirons l'intéressante formule :

$$0^{n+1}(x) + 0^{n-1}(x) = \frac{\partial^2 S^n(x)}{\partial x^2} + S^n \qquad (1)$$

En remplaçant $O^{n+1}(x)$ et $O^{n-1}(x)$ par leurs valeurs tirées de l'équation (5) précédente, en additionnant et en égalisant à $\frac{\partial^2 S^n(x)}{\partial x^2} + S^n(x)$, nous avons un intéressant moyen de vérification de notre formule (1).

$$\left.\begin{aligned} O^{n+1}(x) &= \frac{1}{2} S^n \quad - \frac{1}{2} \frac{\partial S^{n+1}}{\partial x} \\ O^{n-1} \quad &= \frac{1}{2} S^{n-2} - \frac{1}{2} \frac{\partial S^{n-1}}{\partial x} \end{aligned}\right\} (\partial)$$

$$O^{n+1}(x) + O^{n-1}(x) = \frac{1}{2}\left\{S^n(x) + S^{n-2}(x) - \left(\frac{\partial S^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial S^{n-1}}{\partial x}\right)\right\}$$

$$= \frac{\partial^2 S^n(x)}{\partial x^2} + S^n(x)$$

$$\text{d'où} = \frac{1}{2}\left(S^{n-2}(x) - S^n(x)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S^{n+1}(x)}{\partial x} + \frac{\partial S^{n-1}}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 S^n(x)}{\partial x^2}$$

mais $S^{n-2}(x) - S^n(x) = 2 \frac{\partial S^{n-1}}{\partial x}$, et

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\partial S^{n-1}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial S^{n+1}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial S^{n-1}}{\partial x} = \frac{\partial^2 S^n(x)}{\partial x},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S^{n-1}(x)}{\partial x} - \frac{\partial S^{n+1}(x)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 S^n}{\partial x}.$$

Ce procédé de vérification nous amène à une valeur qui n'est qu'un cas de notre formule ($8^{bis}$) de la page 74. Ceci nous permet de conclure que notre relation (1) est exacte.

On pourrait aussi remplacer $O^{n+1}(x)$ et $O^{n-1}(x)$ par leurs valeurs tirées des formules (6), et l'on arriverait encore au même résultat, ce qui vérifie doublement les résultats donnés.

## II.

Posons ensuite:

$$O^{n+1}(x) = \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left(s f_n(2s, 0) + f_{n-1}(2s, 0)\right) ds$$

et

$$O^{n-1}(x) = \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left(s f_{n-2}(2s, 0) + f_{n-3}(2s, 0)\right) ds.$$

Par soustraction nous obtenons:

$$0^{n+1}(x) - 0^{n-1}(x) = \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \Big\{ s f_n(2s,0) - s f_{n-2}(2s,0) + f_{n-1}(2s,0) - f_{n-3}(2s,0) \Big\} ds,$$

on sait que:

$$f_n = 2s f_{n-1} + f_{n-2}$$
$$f_{n-1} = 2s f_{n-2} + f_{n-3}$$

Avec ces substitutions notre intégrale devient:

$$\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \Big\{ 2s^2 f_{n-1} + s f_{n-2} - s f_{n-2} + 2s f_{n-2} + f_{n-3} - f_{n-3} \Big) ds,$$

$$= \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \Big\{ 2s^2 f_{n-1} + 2s f_{n-2} \Big) ds.$$

$$= 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} s \Big( s f_{n-1} + f_{n-2} \Big) ds.$$

mais

$$\frac{\partial 0^n(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \big( s f_{n-1} + f_{n-2} \big) ds$$

$$= - \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} s \big( s f_{n-1} + f_{n-2} \big) ds.$$

Ce qui nous permet de conclure:

$$0^{n+1}(x) - 0^{n-1}(x) = -2 \frac{\partial 0^n(x)}{\partial x} \quad \text{ou}$$

$$0^{n-1}(x) - 0^{n+1}(x) = 2 \frac{\partial 0^n(x)}{\partial x} \qquad (2.)$$

C'est donc une relation pour la différence de 2 fonctions $0(x)$. relation assez analogue à celle pour la différence de 2 fonctions $S(x)$

Ces 2 relations sont déduites du nouveau mode de représentation des fonctions Besséliennes de 2$^e$ espèce suivant une fonction du numérateur d'une réduite de la fraction continue $\{2s \ldots\ldots 2s\}$.

## III.

En nous reportant à la formule (5.) page 72, nous avons:

$$O^n(x) = \frac{1}{2}\left(S^{n-1}(x) - \frac{\partial S^n}{\partial x}\right)$$

Développons ainsi $O^{n-1}$ et $O^{n+1}(x)$. En faisant la différence nous avons:

$$O^{n-1}(x) = \frac{1}{2}\left(S^{n-2}(x) - \frac{\partial S^{n-1}(x)}{\partial x}\right),$$

$$O^{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(S^{n}(x) - \frac{\partial S^{n+1}(x)}{\partial x}\right),$$

$$\left(O^{n-1}(x) - O^{n+1}(x)\right) = \frac{1}{2}\left(S^{n-2}(x) - S^{n}(x)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S^{n+1}(x)}{\partial x} - \frac{\partial S^{n-1}(x)}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\frac{\partial S^{n-1}}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S^{n+1}(x)}{\partial x} - \frac{\partial S^{n-1}(x)}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S^{n-1}(x)}{\partial x} + \frac{\partial S^{n+1}(x)}{\partial x}\right).$$

Ce qui nous donne la relation:

$$4\,\frac{\partial O^n(x)}{\partial x} = \frac{\partial S^{n-1}(x)}{\partial x} + \frac{\partial S^{n+1}(x)}{\partial S} \qquad (3)$$

Ce résultat est aussi développable en partant de

$$\frac{\partial S^n(x)}{\partial x} = -2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s, 0)\, ds.$$

*et il montre que la formule:*

$$S^{n-1}(x) + S^{n+1}(x) = 4\,O^n(x),$$

*est encore valable quand on en prend la dérivée par rapport à x.*

*En posant aussi:*

$$O^n(x) = \int_0^x e^{-xs}\left(s\, f_{n-1}(2s, 0) + f_{n-2}(2s, 0)\right) ds$$

et

$$\frac{\partial O^n}{\partial x} = -\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\left(s\, f_{n-1}(2s, 0) + f_{n-2}(2s, 0)\right) ds$$

*puis en appliquant cette formule à*

$$\frac{\partial \theta^{n+1}(x)}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta^{n-1}(x)}{\partial x}$$

*et en additionnant, on arrive à une relation qui doit pouvoir s'obtenir directement en dérivant suivant x :*

$$\theta^{n+1} + \theta^{n-1} = \frac{\partial^2 S^n}{\partial x} + S^n .$$

En effet

$$\frac{\partial \theta^{n+1}(x)}{\partial x} = - \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} (s^2 f_n + s f_{n+1}) \, ds$$

$$\frac{\partial \theta^{n-1}(x)}{\partial x} = - \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} (s^2 f_{n-2} + s f_{n-3}) \, ds.$$

L'addition donne :

$$\frac{\partial \theta^{n+1}(x)}{\partial x} + \frac{\partial \theta^{n-1}(x)}{\partial x} = - \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} (s^2 f_n + s^2 f_{n-2} + s f_{n-1} + s f_{n-3}) \, ds.$$

mais $f_n = 2 s f_{n-1} + f_{n-2}$

$s^2 f_n = 2 s^3 f_{n-1} + s^2 f_{n-2}$ et $2 s^2 f_{n-2} + s f_{n-3} = s f_{n-1}$ ;

nous avons donc

$$\frac{\partial \theta^{n+1}(x)}{\partial x} + \frac{\partial \theta^{n-1}(x)}{\partial x} = - \int e^{-xs} \{2 s^3 f_{n-1} + 2 s^2 f_{n-2} + s f_{n-1} + s f_{n-3}\} \, ds$$

$$= - \int e^{-xs} (2 s^3 f_{n-1} + 2 s f_{n-1}) \, ds$$

$$= - 2 \int e^{-xs} s (s^2 + 1) f_{n-1} \, ds$$

$$S^n(x) = 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} f_{n-1} \, ds$$

$$\frac{\partial S^n(x)}{\partial x} = - 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} s f_{n-1} \, ds$$

$$\frac{\partial^3 S^n(x)}{\partial x^3} = -2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} s^3 f_{n-1}\, ds$$

$$\frac{\partial S^n(x)}{\partial x} + \frac{\partial^3 S^n(x)}{\partial x} = -2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} s\,(s^2+1)\, f_{n-1}\, ds \qquad \text{d'où}$$

$$\frac{\partial 0^{n+1}(x)}{\partial x} + \frac{\partial 0^{n-1}(x)}{\partial x} - \frac{\partial^3 S^n(x)}{\partial x^3} + \frac{\partial S^n(x)}{\partial x} \qquad (4)$$

C. q. f. d.

## IV.

*Nous avons eu la formule :*

$$0^{n-1}(x) - 0^{n+1} = \frac{2\,\partial\, 0^n}{\partial x},$$

*nous devons obtenir une relation analogue entre les dérivées de $0^{n-1}(x)$ et de $0^{n+1}(x)$, relation que l'on pourrait obtenir directement en dérivant cette formule suivant $x$.*

*En effet:*

$$\frac{\partial 0^{n+1}(x)}{\partial x} = -\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\,(s^2 f_n + s f_{n-1})\, ds,$$

faisons dans cette intégrale

$$f_n = 2 s f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{et} \quad f_{n-1} = 2 s f_{n-2} + f_{n-3}$$

$$\frac{\partial 0^{n+1}(x)}{\partial x} = -\int e^{-xs}\,(2 s^3 f_{n-1} + s^2 f_{n-2} + s f_{n-1})\, ds$$

$$= -\int e^{-xs}\,(2 s^3 f_{n-1} + 3 s^2 f_{n-2} + s f_{n-3})\, ds$$

$$= -2\int e^{-xs} s^2\,(s f_{n-1} + f_{n-2})\, ds + \int e^{-xs} s\,(s f_{n-2} + f_{n-3})\, ds.$$

La première de ces intégrales n'est autre chose que

$$-2\frac{\partial^2 0^n(x)}{\partial x}, \quad \text{et la seconde} + \frac{\partial 0^{n-1}(x)}{\partial x}.$$

Donc

$$\frac{\partial 0^{n+1}(x)}{\partial x} = \frac{\partial 0^{n-1}(x)}{\partial x} - 2\frac{\partial^2 0^n}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial 0^{n-1}(x)}{\partial x} - \frac{\partial 0^{n+1}(x)}{\partial x} = 2\frac{\partial^2 0^n(x)}{\partial x^2} \qquad (5)$$

C. q. f. d.

Les relations (2) et (5) de ce chapitre nous permettront évidemment d'obtenir des sommations pour

$$O^n(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial O^n(x)}{\partial x},$$

analogues aux sommations du chapitre précédent pour

$$S^n(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial S^n(x)}{\partial x}$$

Nous pouvons poser:

$$-\frac{\partial O^n(x)}{\partial x} = 2\frac{\partial^2 O^{n-1}(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial O^{n-2}(x)}{\partial x}$$

$$= 2\frac{\partial^2 O^{n-1}(x)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 O^{n-3}(x)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 O^{n-5}(x)}{\partial x^2} + \cdots\cdots$$

$$+ 2\frac{\partial^2 O^2(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial O^1(x)}{\partial x}$$

quand $n$ est *impair*, et

$$-\frac{\partial O^n(x)}{\partial x} = 2\frac{\partial^2 O^{n-1}(x)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 O^{n-3}(x)}{\partial x^2} + \cdots + 2\frac{\partial^2 O^1(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial O^0(x)}{\partial x}$$

quand $n$ est *pair*.

Ceci donne les 2 formules par sommation:

$$-\frac{\partial O^{2p+1}(x)}{\partial x} = \frac{2}{x^3} + 2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p}\frac{\partial^2 O^{2\lambda}(x)}{\partial x^2} \tag{6}$$

$$-\frac{\partial O^{2p}(x)}{\partial x} = \frac{1}{x^2} + 2\sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-1}\frac{\partial^2 O^{2\lambda+1}(x)}{\partial x^2}. \tag{6^{bis}}$$

D'où

$$-\left(\frac{\partial O^n(x)}{\partial x} + \frac{\partial O^{n-1}(x)}{\partial x}\right) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + 2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1}\frac{\partial^2 O^\lambda}{\partial x^2} \tag{7}$$

Les 2 valeurs (6) et (6^bis) se réunissent évidemment en une seule

$$-\frac{\partial O^n(x)}{\partial x} = \frac{2\sin n\frac{\pi}{2}}{x^2} + \frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{2}}{x^2} + 2\sum_{\lambda=0}^{\lambda\leq\frac{n-1}{2}}\frac{\partial^2 O^{n-(2\lambda+1)}(x)}{\partial x^2} \tag{8}$$

Nous pouvons poser encore

$$-\,0^{n}(x) = 2\,\frac{\partial\,0^{n-1}(x)}{\partial\,x} - 0^{n-2}(x)$$

$$= 2\,\frac{\partial 0^{n-1}(x)}{\partial\,x} + 2\,\frac{\partial\,0^{n-3}(x)}{\partial\,x} + \cdots + 2\,\frac{\partial\,0^{2}(x)}{\partial x} - 0^{1}(x)$$

avec $n$ impair, et

$$-\,0^{n}(x) = 2\,\frac{\partial\,0^{n-1}(x)}{\partial\,x} + 2\,\frac{\partial\,0^{n-3}(x)}{\partial\,x} + \cdots + 2\,\frac{\partial\,0^{1}(x)}{\partial x} - 0^{0}(x)$$

quand $n$ est *pair*.

Nous obtenons alors 2 sommations:

$$-\,0^{2p+1}(x) = -\frac{1}{x^{2}} + 2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p}\frac{\partial\,0^{2\lambda}(x)}{\partial\,x} \quad \text{et} \tag{9}$$

$$-\,0^{2p}(x) = -\frac{1}{x} + 2\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{p-1}{2}}\frac{\partial\,0^{2\lambda+1}(x)}{\partial x}. \tag{9^{bis}}$$

D'où

$$-\left(0^{n}(x) + 0^{n-1}(x)\right) = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^{2}}\right) + 2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1}\frac{\partial\,0^{\lambda}}{\partial x}. \tag{10}$$

Les valeurs (9) et (9^bis) mises en une forme plus générale donnent:

$$-\,0^{n}(x) = -\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{x^{2}} + \frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{2}}{x}\right) + 2\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n-1}{2}}\frac{\partial\,0^{n-(2\lambda+1)}}{\partial x}. \tag{11}$$

La formule (11) peut comme la formule (15) du chapitre précédent se ramener à une double sommation qui est:

$$0^{n}(x) = \sin\frac{n\pi}{2}\left(\frac{1}{x^{2}} + \frac{2(n-1)}{x^{3}}\right) + \sin\frac{(n-1)\,\pi}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{n}{x^{2}}\right)$$

$$+ 4\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n-1}{2}}\ \sum_{\mu=0}^{\mu<\frac{n-2\lambda-2}{2}}\frac{\partial^{2}\,0^{n-2\lambda-2\mu-2}}{\partial\,x^{2}} \tag{12}$$

## Conclusions:

Considérons la fonction Besselienne de 2e espéce $O^n(x)$

$$O^n(x) = \int_0^N e^{-xs}\left(t^n + (-1)^n t^{-n}\right) ds.$$

et donnons lui la nouvelle forme que nous avons introduite dans le § 6 de notre thèse; soit:

$$O^n(x) = \int_0^N e^{-xs}\left(s f_{n-1}(2s, 0) + f_{n-2}(2s, 0)\right) ds;$$

considérons de même la fonction Besselienne de 2e espéce $S^n(x)$:

$$S^n(x) = \int_0^N e^{-xs}\left(t^n - (-1)^n t^{-n}\right) \frac{dt}{t}$$

et donnons lui aussi notre nouvelle forme inaugurée au chapitre Ier de cette note:

$$S^n(x) = 2 \int_0^N e^{-xs} f_{n-1}(2s, 0) ds.$$

Rappelons encore que $f_n(2s, 0)$ est le numérateur de la dernière réduite de la fraction continue: $(2s \cdot 2s \cdot 2s \cdot \cdots \cdot 2s)$ ayant n quotients incomplets.

a) Ces deux nouvelles formules conduisent aisément aux sommations pour $O^n(x)$ et $S^n(x)$. (§ 6 notre thèse — chapitre Ier de cette note.)

b) Elles permettent en tenant compte des propriétés de $f_n(2s, 0)$ d'arriver rapidement aux 4 relations suivantes

I. $S^{n-1}(x) - S^{n+1}(x) = 2 \frac{\partial S^n}{\partial x}$ (formule 2 chap. II.)

II. $S^{n+1}(x) + S^{n-1}(x) = 4 O^n(x)$ ( » 1 » II.)

III. $O^{n-1}(x) - O^{n+1}(x) = 2 \frac{\partial O^n}{\partial x}$ ( 2 III.)

IV. $O^{n+1}(x) + O^{n-1}(x) = S^n(x) + \frac{\partial^2 S^n(x)}{\partial x^2}$ ( » 1 » III.)

Dont les 3 premières sont déjà connues.

*Faisons remarquer que la nouvelle formule IV conduit des fonctions $O^n(x)$ aux fonctions $S^n(x)$, à l'inverse de la formule II.*

c) La valeur $\frac{\partial S^n(x)}{\partial x}$ pouvant aussi se mettre sous la forme d'une intégrale définie conduit aux valeurs suivantes pour $O^n(x)$ (§ 3 chap. II).

$$\text{V.} \quad \begin{cases} O^n(x) = \frac{1}{2}\left(S^{n-1} - \frac{\partial S^n(x)}{\partial x}\right) \\ O^n(x) = \frac{1}{2}\left(S^{n+1} + \frac{\partial S^n(x)}{\partial x}\right) \end{cases}$$

d) L'application des propriétés de $f_n(2s, 0)$ aux intégrales donnant les valeurs

$$\frac{\partial O^n(x)}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial S^n(x)}{\partial x}$$

*conduit à 2 nouvelles relations démontrant que les formules I et III subsistent quand on les dérive par rapport à x, autrement dit qu'il existe des relations analogues entre les dérivées suivant x et entre les fonctions directes:*

$$\text{VI.} \quad \frac{\partial S^{n-2}(x)}{\partial x} - \frac{\partial S^n(x)}{\partial x} = \frac{2d^2 S^{n-1}(x)}{\partial x} \quad \text{(formule 8}^{\text{bis}}\text{ chap. II.)}$$

$$\text{VII.} \quad \frac{\partial O^{n-2}(x)}{\partial x} - \frac{\partial O^n(x)}{\partial x} = 2\frac{\partial^2 O^{n-1}(x)}{\partial x^2} \quad (\text{ » } 5 \text{ chap. III.})$$

*e) Les deux formules V avec $n-1$ et $n+1$ retranchées et comparées ensuite à III, nous donnent un résultat prouvant qu'il existe entre les dérivées suivant x dans la formule II, une relation analogue à celle entre les fonctions directes.*

$$\text{VIII.} \quad \frac{\partial S^{n-1}(x)}{\partial x} + \frac{\partial S^{n+1}(x)}{\partial x} = 4\frac{\partial O^n(x)}{\partial x} \quad \text{(formule 3 chap. III.)}$$

*f) Les dérivées de $O^{n-1}(x)$ et de $O^{n+1}(x)$ mises en intégrales et additionnées nous démontrent encore que la formule IV subsiste quand on dérive tous les termes suivant x.*

$$\text{IX.} \quad \frac{\partial O^{n+1}(x)}{\partial x} + \frac{\partial O^{n-1}(x)}{\partial x} = \frac{\partial S^n(x)}{\partial x} + \frac{\partial^3 S^n(x)}{\partial x^3} \quad \text{(formule 4 chap. III.)}$$

g) Les relations I et III conduisent aux lois suivantes:

*1. Une fonction Besséliene de II^e espèce O ou S à indice positif, prise négativement est égale à 2 fois la somme des dérivées suivant x de toutes les mêmes fonctions inférieures à indices positifs mais de parité différente, moins une constante.*

*2. La somme de deux fonctions Besséliennes de I^e espèce O ou S à indices positifs consécutifs, prise avec le signe —, est égale à 2 fois la somme des dérivées suivant x de toutes les fonctions inférieures à indices positifs, moins une constante.*

(Voir les formules 14 et 15 chap. II et les formules 11 et 12 chap. III.)

h) Les relations VI et VII conduisent aux mêmes lois pour le développement des dérivées premières en fonction des dérivées secondes.

*1. Les lois de formation des fonctions Besséliennes O ou S à indices positifs, en fonction des dérivées premières des mêmes fonctions à indices inférieurs et d'une autre parité, subsistent pour le développement des dérivées premières en fonction des dérivées secondes.*

*2. La somme prise négativement, de 2 dérivées premières de fonctions O ou S consécutives est égale à 2 fois la somme des dérivées secondes de toutes les fonctions inférieures, plus une constante.*

(Formules 10 et 11 chap. II et formules 7 et 8 chap. III.)

k) Les fonctions O ou S peuvent se représenter par des doubles sommations. (Formule 18 chap. I et formule 12 chap. II).

## Sur un cas particulier du développement de la fonction $P_m^a(x)$ en une intégrale définie

*cas de lim $m = \infty$.*

Rappelons la valeur de $P_m^a(x)$: *)

$$P_m^a(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda \leq \frac{m+1}{2}} (-1)^\lambda \frac{(m-\lambda)!}{\lambda!} \binom{a+m-\lambda}{m-2\lambda} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda}$$

Développons le coefficient binoméal

*) J.-H. Graf, ibidem «Annali di Matematica».

$$\binom{a + m - \lambda}{m - 2\lambda} \quad \text{suivant} \quad \binom{n}{\lambda} = \frac{n!}{\lambda!\,(n-\lambda)!}$$

et introduisons la notation Eulérienne soit $n! = \Gamma(n+1)$.

Nous aurons:

$$P^a_m(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^\lambda\, \Gamma(m-\lambda+1)\, \Gamma(a+m-\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)\, \Gamma(m-2\lambda+1)\, \Gamma(a+\lambda+1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda}$$

en considérant $\lim m = \infty$, nous aurons

$$P^a_m(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \frac{\Gamma(m-\lambda+1)\, \Gamma(a+m-\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)\, \Gamma(m-2\lambda+1)\, \Gamma(a+\lambda+1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda}$$

Rappelons encore que

$$\Gamma(n+a) = n^a\, \Gamma n \; *)$$

pour $\lim n = \infty$.

Nous aurons alors:

$$\Gamma(m+1-2\lambda) = \Gamma((m+1-\lambda)-\lambda) = (m-\lambda+1)^{-\lambda}\, \Gamma(m-\lambda+1)$$

$$\Gamma((m-\lambda+1)+a) = (m-\lambda+1)^a\, \Gamma(m-\lambda+1).$$

En introduisant ces valeurs dans la fonction $P^a_m(x)$, nous obtenons:

$$P^a_m(x) \underset{\lim m=\infty}{=} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda\, \Gamma(m-\lambda+1)\,(m-\lambda+1)^a\, \Gamma(m-\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)\, \Gamma(a+\lambda+1)\,(m-\lambda+1)^{-\lambda}\, \Gamma(m-\lambda+1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda\, \Gamma(m-\lambda+1)\,(m-\lambda+1)^{a+\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)\, \Gamma(a+\lambda+1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda}$$

On aura de même

$$(m-\lambda+1)^{a+\lambda}\, \Gamma(m-\lambda+1) = \Gamma(m-\lambda+1+\lambda+a) = \Gamma(m+a+1) = (m+a)!$$

On peut remplacer $\frac{1}{\lambda!}$ par

$$\frac{1}{\lambda!} = \frac{2^{2\lambda}\, \Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(2\lambda)!}$$

ce qui donne:

*) Prof. Dr. *J. H. Graf*, Einleitung in die Theorie der Gammafunktion, page 5. Bern, 1894.

$$P_{\lim m=\infty}^{a}(x) = \frac{(m+a)!}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^{\lambda} 2^{2\lambda} \Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}{(2\lambda)!\ \Gamma(a+\lambda+1)\ \Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)} \cdot \binom{2}{x}^{m} \cdot \binom{2}{x}^{-2\lambda}$$

mais

$$\frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a+\lambda+1)} = \int_0^1 y^{\lambda-\frac{1}{2}} (1-y)^{a-\frac{1}{2}}\, dy.$$

D'où

$$P_{\lim m=\infty}^{a}(x) = \frac{(m+a)!\ 2^{m}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)} x^{m} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^{\lambda} x^{2\lambda}}{(2\lambda)!} \int_0^1 y^{\lambda-\frac{1}{2}} (1-y)^{a-\frac{1}{2}} dy$$

Faisons $y = y^2$ d'où $dy = 2y\, dy$

l'intégrale deviendra.

$$2\int_0^1 y^{2\lambda-1} (1-y^2)^{a-\frac{1}{2}} y \,.\, dy\ ;$$

ce qui donne

$$P_{m}^{a}(x) = \frac{(m+a)!\ 2^{m}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)} x^{m} 2\int_0^1 (1-y^2)^{a-\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^{\lambda} \frac{(xy)^{2\lambda}}{2\lambda!} dy.$$

La sommation devient cos xy.

Nous pouvons encore considérer $2\int$; la 1re de 0 à 1 et la seconde avec y changé en $-y$ va de 0 a $-1$, et devient négative.

Elle peut devenir:

$$\int_{-1}^{0} (1-y^2)^{a-\frac{1}{2}} \cos xy \,.\, dy.$$

Les intégrales donneront:

$$\int_{-1}^{0} (1-y^2)^{a-\frac{1}{2}} \cos xy\, dy + \int_0^1 (1-y^2)^{a-\frac{1}{2}} \cos xy\, dy$$

$$= \int_{-1}^{+1} (1-y^2)^{a-\frac{1}{2}} \cos xy\, dy.$$

en faisant $y = \cos\varphi$, les nouvelles limites seront

$$y = -1 \qquad \varphi = \pi$$
$$y = 1 \qquad \varphi = 0$$
$$dy = d\cos\varphi = -\sin\varphi\, d\varphi.$$

En changeant les limites on aura pour l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \sin^{2a-1}\varphi \left(\cos\left\{x\,(\cos\varphi)\right\}\right) \sin\varphi\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi} \sin^{2a}\varphi \,.\, \cos\left(x\cos\varphi\right) d\varphi.$$

La fonction $P_m^a(x)$ avec $m = \infty$ devient donc :

$$P_{\lim m=\infty}^{a}(x) = \frac{\Gamma(m+a+1)\,2^m}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)x^m} \int_0^{\pi} \cos\left\{x\cos\varphi\right\} \sin^{2a}\varphi \,.\, d\varphi.$$

$$= \frac{\Gamma(m+a+1)\,2^m}{\Gamma\frac{1}{2}\cdot\Gamma\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\cdots\left(a-\frac{1}{2}\right)\cdot x^m} \int_0^{\pi} \cos\,(x\cos\varphi)\,\sin^{2a}\varphi\, d\varphi$$

$$P_{\lim m=\infty}^{a}(x) = \frac{2^{m+a}\,.\,\Gamma(m+a+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2a-1)} \frac{1}{x^m\,.\,\pi} \int_0^{\pi} \cos\left(x\cos\varphi\right)\sin^{2a}\varphi\, d\varphi. \quad (\alpha.)$$

Cette valeur de $P_m^a(x)$ déduite de la théorie des fonctions Eulériennes, peut être facilement transformée et ramenée à la formule de définition donnée par M. *J.-H. Graf* dans le travail précité. Pour cela, reportons nous à la formule de Jacobi, pour $J^a(x)$:

$$J^a(x) = \frac{x^a}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot 2a-1} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\,(x\cos\varphi)\,\sin^{2a}\varphi\, d\varphi :$$

notre valeur $P_m^a(x)$ devient alors:

$$P_m^a(x) = \frac{2^{m+a}\,\Gamma(m+a+1)}{x^{m+a}}\, J^a(x)$$

Introduisons maintenant pour cette dernière fonction la valeur donnée par l'auteur précédent

$$\underset{\lim m = \infty}{J^a(x)} = \frac{f_m\left(\frac{2(a+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right)}{\Gamma(m+a+1)} \left(\frac{ix}{2}\right)^m \left(\frac{x}{2}\right)^a$$

Après simplification, il reste la formule fondamentale:

$$P_m^a(x) = i^m f_m\left(\frac{2(a+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right).$$

L'expression ($\alpha$) est la relation cherchée.

**P. Gruner.**

Eingereicht im Januar 1898.

# Energetische Anschauungen.

Immer noch bildet die Energetik ein viel bestrittenes Gebiet der Physik. Die Kritiken dieser neuen Theorie haben sich in letzter Zeit so sehr gemehrt, dass es wohl der Mühe werth ist nochmals darauf zurückzukommen. — Am besten ist die Stellung der mechanistischen Atomistik zur Energetik im neu erschienenen Werk von Herrn Prof. *Boltzmann* über «die Prinzipe der Mechanik» (Leipzig 1897) dargestellt. — Aber gerade aus dieser durchaus klaren und sachlichen Beurtheilung geht hervor, dass bei allen diesen Kritiken der Energetik ein fundamentaler Punkt nicht in Betracht gezogen wird, nämlich die metaphysische Bedeutung der ganzen Streitfrage.

Es mag seltsam scheinen, dass eine physikalische Theorie die Metaphysik zu ihrer Stütze macht. Hr. Boltzmann hebt übrigens auch hervor (p. 4. a. o. O), dass metaphysische Gründe hier nicht in Betracht zu ziehen seien. Allerdings darf niemals zur Beurtheilung irgend eines thatsächlichen Verhältnisses eine metaphysische Spekulation massgebend sein. Aber im Streit zwischen Mechanistik und Energetik handelt es sich doch nicht um solche thatsächliche Verhältnisse; es handelt sich nicht darum, reine Thatsachen zu sondern und zu scheiden sondern lediglich um die Zusammenfassung einer Reihe von Thatsachen unter einen einheitlichen Gesichtspunkt; und eine solche Zusammenfassung hat immer einen hypothetischen oder spekulativen Charakter; desshalb werden bei derartigen Theorien metaphysische Einflüsse nicht nur mitspielen, sondern geradezu ausschlaggebend sein. Dass wir in dieser Ansicht nicht allein stehen, lehrt folgendes Citat aus *Hertz*: «Prinzipien der Mechanik» (Leipzig 1894) p. 27... «die *gewöhnliche* Antwort (auf Voraussetzungen metaphysischen Ur-

sprungs) ist, dass die Physik darauf verzichtet habe und es nicht mehr als Pflicht anerkenne, den Ansprüchen der Metaphysik gerecht zu werden. Sie lege kein Gewicht mehr auf die Gründe, welche von metaphysischer Seite einst zu Gunsten der Prinzipien vorgebracht worden seien, welche einen Zweck in der Natur andeuten». . . . . Darauf aber fährt *Hertz* weiter: «*Kein Bedenken, welches überhaupt Eindruck auf unsern Geist macht, kann dadurch erledigt werden, dass es als metaphysisch bezeichnet wird: jeder denkende Geist hat als solcher Bedürfnisse, welche der Naturforscher metaphysische zu nennen gewohnt ist.* In Uebereinstimmung mit *Hertz* dürfen wir also ausdrücklich hervorheben, dass bei solch' prinzipiellen Fragen, wie sie von der Energetik aufgeworfen worden sind, die metaphysische Begründung nicht ohne weiteres übergangen werden darf.

In der That liegt in dieser Nicht-Beachtung der metaphysischen Gründe seitens der Gegner der Energetik wohl die Hauptursache, wesshalb die zahlreichen Diskussionen zu keinem rechten Resultat zu führen scheinen. Dies mag in folgender Weise erläutert werden:

Man ist sich heutzutage allgemein darüber einig, dass unsere Gedanken über die Natur blosse Bilder oder Zeichen der wahren Objekte selber sind. Auch darüber herrscht wohl überall Klarheit, dass jegliche naturwissenschaftliche Theorie nur dazu dienen soll, diese Einzel-Bilder zu einem mehr oder weniger einheitlichen Gesammtbilde zu vereinigen. Die mechanistische Atomistik und die Energetik liefern 2 solche Gesammtbilder. Das erstere stellt uns die Welt dar durch ein grosses System sog. materieller Punkte, die auf einander Fernewirkungen ausüben. Diese Wirkungen und die daraus resultirenden Bewegungen sollen die Gesammtheit der Naturerscheinungen darstellen. Die Energetik stellt uns die Welt dar als ein grosses System von raumerfüllender sog. Energie, deren Gesammtsumme konstant bleibt, die aber in steten Transformationen begriffen ist. Die Empfindungen dieser Transformationen durch unsere Sinne bilden in ihrer Gesammtheit die Wahrnehmung der uns umgebenden Natur.

Beide Theorien haben ihren metaphysisch-hypothetischen Charakter: was ein materieller Punkt und eine Fernekraft sei, wissen wir so wenig, als worin das Wesen der Energie und ihrer Transformationen bestehe.

Zwischen diesen beiden Bildern gilt es zu entscheiden. Da frägt es sich denn, wonach man entscheiden wolle, ob nach der Verwend-

barkeit der Bilder oder nach irgend einem metaphysischen Grunde. Prof. *Boltzmann* geht den erstern Weg und kommt dadurch zum Resultat, dass die Atomistik der Energetik weitaus vorzuziehen sei. Natürlich! Denn die Atomistik ist seit Jahrhunderten stets ausgebaut worden und hat erst noch im Werke von Prof. *Boltzmann* eine mustergültige Darstellung erhalten. Die Energetik steht noch unentwickelt da und kann sich in keiner Weise mit der Atomistik messen. — In der That: so lange die Energetik nicht wenigstens eben so klar und hypothesenfrei dasteht, wie die Mechanistik, so lange darf erstere nicht *definitiv* als mit letzterer gleichberechtigt angesehen werden.

Aber es gibt eben noch eine ganz andere Beurtheilungsweise. Wenn eine neue Theorie auftritt, so kann sie sich nicht sofort mit der alten, längst entwickelten direkt messen. Hier wirken die metaphysischen Gründe mit. Dass diese immer eine Hauptrolle bei neuen Theorien spielen ist bekannt. Es sind hauptsächlich spekulative Gründe, die *Faraday* und *Maxwell* auf ganz neue Gedanken betreffs der Elektricität führten. Es sind metaphysische Gründe die selber am meisten zur allgemeinen Anerkennung der mechanistischen Anschauung beitragen. *Huyghens*, der Begründer der mechanistischen Undulationstheorie, hebt in seinem Werke über das Licht hervor, wie die philosophische Ueberzeugung, dass alle Naturerscheinungen aus Bewegungen bestehen, ihn zu seiner Theorie geführt haben. — Es sind auch rein metaphysische Gründe, wesshalb man früher ohne Bedenken das *Newton'sche* Gravitationsgesetz als unvermittelte Fernewirkung ansah, während gegenwärtig dieser Begriff der Fernewirkung in grossem Misskredite steht. Auch die Urheber der kinetischen Gastheorie sind wohl durch Betrachtungen allgemeiner, metaphysischer Natur auf die Idee geführt worden, die Gasgesetze durch Molekülarbewegung darzustellen. Wir thun dadurch der Exaktheit der Naturforschung keinerlei Eintrag, wenn wir auch ehrlich zugestehen, dass alle ihre wichtigern Theorien metaphysischen Ueberlegungen entsprungen seien.

Während aber bis vor wenigen Jahrzehnten die ganze Richtung der naturwissenschaftlichen Metaphysik dahin ging, Alles auf Bewegung von Atomen und Aether zurückzuführen, hat sich in neuerer Zeit ein gewisser Umschwung in den allgemeinen Ansichten geoffenbart. Schon *Dubois-Reymond* zeigte, wie eng begrenzt das Gebiet des mechanistischen Materialismus sei. *Kirchhoff* hob hervor, dass der ganze Werth der mechanistischen Theorie nur in einer genauen

Beschreibung der Naturvorgänge bestehe — überhaupt hat sich das unbegrenzte Zutrauen, das man der materialistischen Erklärungsweise entgegenbrachte, erheblich gemindert. — Das ist eine Thatsache, die vielleicht seltsam scheint, um so mehr, als gerade in den letzten Zeiten die mechanistische Atomistik sich immer schärfer und vollkommener entwickelt hat. — aber nichtsdestoweniger ist diese Thatsache da, daran ist nichts zu ändern.

Viele Naturforscher fühlen, dass ihre metaphysischen Anschauungen durch die mechanistische Theorie nicht befriedigt werden und sehen sich desshalb nach andern Theorien um.

Worin dieser Umschwung in den metaphysischen Anschauungen besteht, woher er kommt, wieso die Energetik dem modernen metaphysischen Bedürfniss besser entsprechen soll, als die Atomistik — das ist vielleicht unmöglich klar zu legen.

Aber die Thatsachen sind da und darin allein liegt die *gegenwärtige* Begründung der Energetik.

Desshalb auch besteht für den Energetiker nicht nur die Möglichkeit sondern auch die *Gewissheit*, dass die Energetik (allerdings vielleicht erst nach mannigfachen Modifikationen) definitiv über die mechanistische Theorie triumphiren wird. Diese *Gewissheit beruht auf der Ueberzeugung, dass die Energetik metaphysisch gerechtfertigter sei, als die Atomistik.* Hier liegt das punctum saliens — und nicht in der Klarheit oder Unklarheit, nicht in dem Mehr oder Weniger von Hypothesen, auch nicht in der grössern oder geringern Leistungsfähigkeit. — Alles das sind Fragen, die natürlich mit der Zeit erledigt werden müssen, die aber gegenwärtig nicht ausschlaggebend sind. — Mag sein, dass übrigens einmal auch die Zeit kommt, wo neue, tiefere metaphysische Erkenntniss eine noch bessere Theorie, als die Energetik sie liefert, fordern wird.

Freilich wird eingewendet werden, dass hiemit jeder ernsthaften Diskussion der Faden abgeschnitten sei, und dass ein Naturforscher und Physiker nicht mit metaphysischen Gründen die Brauchbarkeit einer physikalischen Theorie beweisen dürfe.

Aber das ist es eben, was der Zweck dieser Zeilen sein soll: zu zeigen, dass *gegenwärtig* die Entscheidung des Streites zwischen Energetik und Mechanistik ausschliesslich auf metaphysischen Argumenten beruhe und noch beruhen müsse. Der Energetiker darf sich also noch nicht anmassen zu behaupten, dass seine Theorie physikalisch besser sei, als die bisherige mechanistische Anschauung —

hingegen können ihrerseits die Gegner der Energetik derselben keinen Einhalt gebieten, dadurch, dass sie die Leistungen der Atomistik mit denen der Energetik vergleichen; dieser Vergleich muss einmal kommen, aber jetzt ist der Zeitpunkt noch nicht da.

Was aber die metaphysischen Gründe zu Gunsten der Energetik anbetrifft, so ist es hier nicht der Ort näher darauf einzutreten. — Diese Gründe sind schon öfters von Prof. *Ostwald* und vom Verfasser (siehe diese Berichte p. 25) angeführt und, so viel mir bekannt ist, eigentlich nie widerlegt worden.

Die beste Kritik der alten mechanistischen Theorie gibt übrigens *Hertz* selber. — Sein klassisches Werk wird Jedem, der noch im Zweifel ist, die metaphysische Mangelhaftigkeit der Mechanistik offenbaren.

Nachdem diese allgemeine Frage einmal erledigt ist, wende ich mich zur Betrachtung einzelner Spezialfragen.

Die Energetik nimmt ihre Berechtigung aus Gründen allgemeiner philosophischer Natur. — Es kann sich gegenwärtig noch gar nicht darum handeln, ein einheitliches System aufzustellen, das aus einigen Grundannahmen heraus alle Naturerscheinungen abzuleiten gestattet. — *Hertz* gibt an, dass er dies vergeblich versuchte — vielleicht scheiterte sein Versuch wesentlich daran, dass er nicht rein energetisch dachte, und dass er neben der Energie noch den Massenbegriff verwendete.

Die reine Energetik kennt nur die 3 Grundbegriffe: Raum, Zeit und Energie, verknüpft durch das erste Grundgesetz, dass die Gesammtsumme der Energie bei jeder möglichen Aenderung konstant bleibe.

Die Energetik hat vor Allem aus zu untersuchen, wie sich diese Begriffe und Gesetze den thatsächlichen, beobachteten Verhältnissen anzupassen haben, d. h. wie die Energie in den verschiedenen physikalischen Disciplinen auftritt und zu den sekundären Begriffen, wie Geschwindigkeit, Wärmemenge, Temperatur, Strahlungsintensität, Stromstärke etc. führt. Daraus werden sich eine Reihe von Gesetzen und Beziehungen ergeben, es werden die Capacitäts- und Intensitätsbegriffe von *Ostwald* eingeführt werden — mit andern Worten, zunächst sind alle bekannten physikalischen Gesetze in die ganz neue und Vielen noch ungewohnte Sprache der Energetik umzusetzen. Dass diese Arbeit zunächst nicht zu einem sehr klaren und einheitlichen Bild führen wird, ist selbstverständlich — so wenig als die

elektromagnetische Theorie von *Maxwell*, die ja heutzutage noch in ihrer Urform Vielen durchaus unverständlich ist. — Erst nach dieser Vorarbeit wird es möglich sein, die energetischen Gesetze zu vereinfachen und zusammenzufassen und dann erst werden sich Consequenzen ziehen lassen können, die durch ihre Bestätigung den definitiven und *experimentellen* Entscheid für oder wider die Energetik liefern werden.

Jetzt sind wir im Stadium, wo die neuen Begriffe und die neue Anschauungweise der Energetik noch gelernt werden müssen. Dass dies nicht leicht ist, ist begreiflich. Es war wohl für jeden Physiker eine schwere Geistesarbeit, sich von den alten Begriffen der Elektricitätsmenge, der Fernewirkung etc. loszulösen und die neuen Begriffe des elektrischen Feldes, der elektrischen und magnetischen Kraftlinien richtig zu erfassen. Die neue Energetik nimmt aber der alten Mechanistik gegenüber eine ganz ähnliche Stellung ein, wie die *Maxwell'sche* Theorie zur alten Fluidatheorie. Eine kleine Ausführung dieser Analogie wird vielleicht nützlich sein: Die alte Elektricitätslehre nahm die Existenz elektrischer Fluida an; diese Fluida sammelten sich an der Oberfläche gewisser Körper, der Leiter; auf diesen Leitern konnten sie sich bewegen und beliebig ausbreiten. — Ausser dieser Beweglichkeit hatten sie die Eigenschaft durch die für sie undurchdringlichen Isolatoren hindurch zu wirken; diese Wirkung, die mit augenblicklicher Geschwindigkeit sich ausbreiten sollte, war den Massen der Fluida direkt und dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional. — In ähnlicher Weise behandelt die Mechanistik die Physik überhaupt. Statt Fluida hat man einfach materielle Punkte zu setzen. Man nimmt die Existenz eines Dinges, Materie genannt, an, das räumlich in Punkten angeordnet ist, man setzt voraus, dass diese sog. materiellen Punkte auf einander momentane Fernewirkungen gemäss dem obigen Gesetze ausüben. Diese Punkte bewegen sich und ziehen sich an und daraus ergeben sich alle physikalischen Gesetze genau so gut, wie aus der Fluidatheorie die elektrischen und magnetischen Gesetze (selbstverständlich ist dies nur eine Analogie, die wie jedes Gleichniss nicht verallgemeinert werden darf).

Aber in der Elektricitätslehre hat sich eine neue Anschauung geltend gemacht: man verwirft die Fluida, ihre Bewegungen und ihre momentanen Fernewirkungen. Statt dessen denkt man sich den ganzen Raum, den man betrachtet, in einen bestimmten Zustand versetzt. Nicht die geriebenen Metallkugeln oder die sog. Stromleiter sind elektrisch wirksam, sondern in den sie umgebenden diëlektrischen

Medien finden stetig von Punkt zu Punkt fortschreitende Zustandsänderungen statt — Zustandsänderungen, die bekanntlich direkt als Strömungen elektrischer und magnetischer Energie aufgefasst werden können (s. die Arbeiten von *Poynting*). Die sog. Fortpflanzung eines elektrischen Stromes in einem Draht besteht also gar nicht in der wahren Fortbewegung eines Fluidums in oder auf dem Draht, sondern in einer Zustandsänderung ausserhalb des Drahtes. Die Anziehungen und Abstossungen elektrisch geladener Körper sind nicht momentane Fernewirkungen sondern nur das Resultat von zeitlich sich ausbreitenden elektrischen Wellen.

Auch die Lichtstrahlen, die früher als wirkliche Transversalwellen des Aethers aufgefasst wurden, sind jetzt nur noch als Schwingungen elektrischer Kräfte, d. h. als blosse Oscillationen anzusehen. — Warum sollte diese Anschauung nicht auch auf die andern physikalischen Gebiete übertragen werden?

Offenbar können doch auch die Bewegungen und Fernewirkungen materieller Punkte durch zeitlich sich ausbreitende Zustandsänderungen ersetzt werden. — Darin liegt das *wesentlich Neue der Energetik*, dass sie die jetzt allgemein anerkannten Hauptgedanken der modernen Elektricitätslehre zu verallgemeinern sucht, nämlich die Gedanken, 1) dass jede Fernewirkung vermittelt ist und 2), dass alle Naturerscheinungen nicht durch wirkliche Bewegungen von Materie oder Aether sondern durch wellenförmig fortschreitende Zustandsänderungen dargestellt werden können. — Das Substrat, das diese Aenderungen erleidet, erhält dann den Namen der in allen Naturerscheinungen unveränderlich auftretenden Grösse, nämlich der Energie.

Wie man in der Elektricitätslehre vom elektromagnetischen Feld ausgeht, welches Punkt für Punkt gewisse elektrische und magnetische Energiemengen enthält, und wie man sich dann in irgend einer Weise eine Störung des Gleichgewichtes in diesem Felde denkt und den Verlauf der Erscheinungen beobachtet resp. berechnet — so hat man auch in der Energetik zu verfahren.

Wir denken uns das ganze Weltall erfüllt mit Energie, die von Punkt zu Punkt in verschiedener Menge und auch in verschiedener Form vorhanden sein kann (gerade wie im elektrischen Feld die Energie als magnetische oder elektrische da sein kann). Zwischen diesen verschiedenen Mengen und Formen bestehen bestimmte Gesetze, welche die weitern Transformationen bedingen und welche wir näher zu untersuchen haben.

Denken wir uns z. B. die Erde und eine über ihrer Oberfläche frei schwebende Kugel. Die Erde und die Kugel repräsentiren gewisse Formen und Mengen von Energie, die wir als Wärmeenergie und Druckenergie vorläufig bezeichnen wollen. Kommen nur diese beiden speziellen Energien vor, während der ganze übrige Raum mit der Energieform allgemeinster Art, der Raumenergie, angefüllt ist, so wird sich ein Raumenergiefeld bestimmter Anordnung bilden — gerade wie sich um zwei elektrisirte Kugeln herum eine bestimmte elektrische Kraftvertheilung ergibt.

Diese Vertheilung der Raumenergie wird ihrerseits wieder mit den Energien der Kugel in Wechselwirkung treten und das sichtbare Resultat derselben wird der Fall der Kugel auf den Boden sein. Diese Bewegung der Kugel kann selber wieder ohne eigentliche Bewegung der Energie, sondern durch blosse fortschreitende Zustandsänderung von Energie dargestellt werden.

War die Kugel anfangs 5 m. über Boden und ist sie nach einer Sekunde zur Erde gefallen, so braucht man sich dabei nicht zu denken, dass ein kugelförmig abbegrenztes Quantum Wärme- und Druckenergie (denn die Kugel ist nichts anders als das) sich wirklich von der Höhe von 5 m. gegen den Boden hin bewegt habe, sondern nur, dass innerhalb einer Sekunde die in dieser Luftsäule von 5 m. Höhe befindliche Raumenergie successive von oben nach unten (wie bei einer fortschreitenden Welle) sich in Druck- und Wärmeenergie (und zudem noch in Bewegungsenergie = lebendige Kraft) transformirt habe. — Es liegt darin derselbe Unterschied der Auffassung, der sich bezüglich des Lichtes zwischen der Emissions- und der Undulationstheorie zeigte, oder auch zwischen der alten Idee, dass die Elektricität in einem Leiter fort fliesse, und der neuen, dass sich nur der Zustand ausserhalb des Leiters verändert.

Natürlich bleiben die thatsächlichen, uns wahrnehmbaren Verhältnisse durchaus dieselben — aber diese energetische Auffassung entspricht dann den neuen Ideen über Fernewirkung am besten.

Bei diesem Anlass mag noch ein Punkt hervorgehoben werden. — Die Energetik wird oft der »Atomistik« entgegengestellt, als ob die beiden einander diametral widersprächen. Das ist nicht der Fall. Wenn die Atomistik lediglich lehrt, dass das raumerfüllende Ding (heisse es jetzt Materie oder Energie) nicht kontinuirlich, sondern in räumlich getrennten Punkten koncentrirt ist, so kann sich die Energetik sehr gut mit dieser Anschauung befreunden. Von Prof.

*Boltzmann* ist mit grosser Schärfe nachgewiesen worden, dass die Bedeutung der Differenzialgleichungen für die Physik eigentlich nur bei dieser atomistischen Betrachtungsweise zur Geltung komme. Dies mag nun auch für die Energetik gelten. Wir denken uns den ganzen Raum mit Energie erfüllt, wir sprechen von Energiedifferentialen, Energieelementen etc.; man kann sich ganz gut diese Elemente in kleinen Raumtheilen koncentrirt denken und diese Raumtheile in endlicher Zahl und räumlich getrennt. — Die absolute Kontinuität der Energie ist kein nothwendiges Postulat der Energetik; so wenig wie in der modernen Elektricitätslehre die Kontinuität der elektrischen Energie im diëlektrischen Feld vorausgesetzt werden muss.

Etwas anderes ist es, sobald die Atomistik mechanistisch wird, d. h. sobald angenommen wird, dass diese materiellen Punkte einander anziehen, dadurch räumliche Bewegungen ausführen und dass diese Bewegungen allein die Gesammtheit der Naturerscheinungen darstellen. — Hier gehen die Wege auseinander. Ob die getrennten «Energiepunkte» (ich gebrauche diesen Ausdruck, um mich der atomistischen Anschauung anzuschliessen) sich gegenseitig bewegen oder nicht, ist für die Energetik belanglos. Dass sie sich gegenseitig beeinflussen, indem von einem Energiepunkt zum andern Transformationen auftreten, darin liegt allein das Wesentliche.

Mag sein, dass dadurch die Energetik oberflächlicher zu sein scheint, als die Atomistik. — Die Atomistik sucht gleichsam ein Bild dieser Energie-Transformationen selber zu geben, indem sie dieselben auf Bewegungen der Energiepunkte selber zurückführen will. Es frägt sich aber nur: welches Gesammtbild ist vorzuziehen? Dasjenige, welches sich auf Beziehungen beruft, die nie durch Beobachtung oder Experiment direkt ergründet werden können, wie die Atombewegungen, oder dasjenige, welches diese Verhältnisse einfach ignorirt und sich möglichst an die Thatsachen zu halten sucht?

Bern, 3. Januar 1898.

J. H. Graf.

# Einiges über Sonnenuhren.

I.

## Taschen-Sonnenuhren.

*1) Ein Stück, herstammend vom Liebhaber der Astronomie H. May v. Rued.*

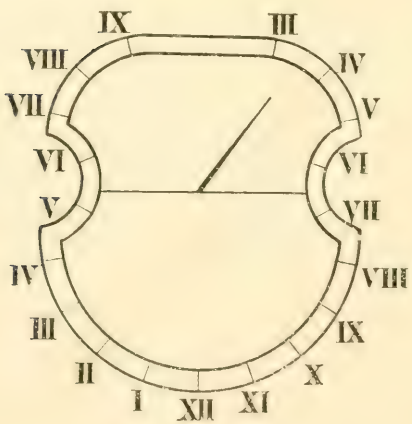
Der Apparat besteht:

1) aus dem sogenannten Stundenring mit der Einteilung in Stunden, einem Querstab mit einer Spitze;

2) dem Quadranten mit einer Einteilung von 0 bis 90°;

3) einen Compass mit Einteilung von 0 bis 180°: in derselben ist die magnet. Deklination für damals = 19° angegeben.

4) Daran befindet sich noch ein Bogen mit einem Loch, in welchem ein kleines Loth aufgehängt werden kann, einesteils zum Visieren, andernteils zum Kontrollieren der Stellung des Apparats.




Der Verfertiger *Johann Georg Vogler*, Compass - Macher in Augspurg giebt folgende Anweisung: *Gebrauch dises Compasses.* «Erstlich, hebet man «den Stundenring in die Höhe, «schliesset solchen vermittelst «des Einschnitts an demselben, «mit dem Quadranten aneinander, «richtet sodann den Ring auf «den beliebigen Grad der Polus-Höhe nach den Quadranten, als zum Exempel vor Augspurg 48 (hier ein Druckfehler 84), vor Regenspurg 49, vor Prag den 50. Grad, und so

«ferner; sodann drehet man den Compass in der Sonnen-Schein so lang, «bis Pfeil auf Pfeil stehet, oder die bewegliche Magnetnadel just auf den «gestochenen Pfeil weiset, welche unten auf der gestochenen Magnet-«Blatte befindlich, so wird der Zeiger in den Ring, welcher vom 23. «Mertz an bis zum 23. Sept. aufrecht von dar an, oder im Winter «unter sich muss gerichtet sein, die rechte Zeit und Stunde anzeigen. «Der Perpendicul dienet, den Compass wasserrecht oder horizontal «zu stellen; auch, so der Compass recht weisen soll, muss er nicht «nahe zum Eisen gestellt werden.»

Auf der Rückseite findet sich eine Tabelle der Elevatio Poli. Unter den Orten, deren Polhöhe angegeben sind, figurieren von Schweizer-Städten Basel mit 47 °, St. Gallen 47 °, Genff 45 °, Lucern 46 °, Zürich mit 46 °. Druckfehler: Blaussenburg statt Klausenburg.

*2) Zweites Stück; dasselbe war im Besitz von H. Prof. Dr. L. Fischer in Bern.* Seine Einrichtung ist dem vorigen vollständig gleich, ja aus gewissen Details, der Gravierung und der äussern Form, könnte man schliessen, dass ein und derselbe Instrumentenmacher diesen und den vorigen Apparat hergestellt habe. Offenbar war hier keine Anleitung mitgegeben; sie ist deshalb nicht nötig, weil auf der Untenseite der Compass-Kapsel die Polhöhe einiger Orte eingraviert sich findet, allerdings darunter Orte wie München, Krakau, Petersburg, Moskau, welche sich auf der gedruckten Anweisung des vorigen Instruments nicht nachweisen lassen. Der einzige Unterschied, abgesehen von der etwas reichern Ausstattung, ist in der Skala zur Magnetnadel, die hier eine Windrose enthält, mit den 4 Hauptthimmelsrichtungen. Die Magnetdeklination ist auf ca. 19 °. —

*3) Das dritte Stück ist eine Taschen-Sonnenuhr viel kleineren Formats.* Sie war im Besitz des *H. Th. Rothen, internat. Telegraphendirektor in Bern* † und ist bei den Ausgrabungen des Panama-Kanals gefunden worden. Offenbar verlor sie im vorigen Jahrhundert ein Reisender, der die dortige Gegend besucht hat. Der Apparat besteht nur aus Stundenring mit Zeiger, Quadrant nebst Kompass. Der Stundenring hat Kreisform-Gestalt. Der Quadrant ist bloss bis 80 ° eingeteilt, beschränkt sich also auf das brauchbare. Auf der Bodenplatte des Compasses, der ebenfalls eine Windrose enthält, finden sich die Polhöhen von Corfu 39 °, Lyon und Ingolstadt 48 ° angegeben. Für Lyon ist dies direkt falsch, da dieselbe nicht mehr als 45 ° betragen kann. Zum Apparat, der *von Ludovicus Theodatus Müller*, Compass-Macher und Mechaniker in Augspurg hergestellt worden ist, findet sich folgende Anleitung:

«*Gebrauch dieses Universal-Compasses.*

«Erstlich hebt man den Stundenring in die Höhe, schliesset «solchen, vermittelst des Einschnitts an demselben, mit dem Quadran- «ten aneinander, richtet sodann den Ring auf den beliebigen Grad «der Polus-Höhe nach den Quadranten, nehmlich also, dass im Sommer «der obere Rand den Grad an dem Quadranten abschneidet, im Winter «aber der untere Rand des Ringes, als zum Exempel vor Augspurg «48, vor Regenspurg 49, vor Prag den 50 ten Grad und so ferner; «sodann drehet man den Compass in der Sonne Schein so lang, bis «Pfeil auf Pfeil stehet, oder die bewegliche Magnet-Nadel just auf den «gestochenen Pfeil weiset, welcher unten auf der gestochenen Magnet- «Platte befindlich, so wird der Zeiger in dem Ring, welcher vom 23. «Merz an bis zum 22. September aufrecht von dar an oder im Winter «unter sich muss gerichtet seyn, die rechte Zeit und Stunde an- «zeigen.»

Schon aus der Vergleichung dieses Textes mit dem der vorigen Anweisung geht hervor, dass dieser Apparat mit dem 1^ten^ aus der gleichen Zeit stammen muss und dass wahrscheinlich Müller und Vogler in irgend einem geschäftlichen Zusammenhang standen. Auch die Elevatio Poli auf der Rückseite weist ganz die gleichen Orte, mit den gleichen Polhöhen, jedoch ohne den Druckfehler Blaussenburg = Claussenburg, auf. Es trifft sich gut, dass alle drei Apparate dem historischen Museum von Bern verbleiben, wo eine eigene Abteilung mathematisch-astronomischer Instrumente gebildet wird. Die genannten wohlerhaltenen Instrumente werden eine schöne Zierde dieser Sammlung bilden. —

*4) Ein viertes Stück, eine kleine Sonnenuhr, Geschenk v. Frl. L. v. Fischer an das historische Museum,* zeichnet sich besonders dadurch aus, dass das kleine Pendelchen resp. Lot vorhanden ist. Das Instrument ist von Messing und teilweise versilbert und verfertigt von *And. Vogl*, wahrscheinlich in Augsburg. Die Polhöhe, Elevatio Poli, ist angegeben:

| | |
|---|---|
| Augsburg, Paris | 48 ° |
| Krakau, Prag | 50 ° |
| Leipzig, Cölln | 51 ° |
| London | 52 ° |

*5) Ein fünftes Stück, ein noch kleineres Instrument, auch eine Sonnenuhr,* ist von Messing, *Verfertiger Lor. Grassl.* Elevatio Poli:

| | |
|---|---|
| Lisabo | 39 ° |
| Rom | 42 ° |
| Venedig | 45 ° |
| Wien, Augsburg, Paris | 48 ° |
| Krakau | 50 ° |

Die Gebrauchsanweisung, deutsch und französisch, stammt von *Johann Nepomuk Schrettegger*, Compassmacher in Augsburg. Sie lautet im Text, wie die schon verlesene und enthält die Polhöhen vieler Orte, darunter folgender schweizerischer Städte:

| | | |
|---|---|---|
| Basel | 47 ° | 55′ |
| St. Gallen | 47 ° | 22′ |
| Genf | 46 ° | 12′ |
| Lucern | 47 ° | |
| Zürich | 47 ° | 22′ |

Dieselben sind höchst ungenau, das sieht man an der Gleichheit der Angaben für Zürich und St. Gallen. —

*6) Sechstes Stück:*

Ein etwas abweichendes System stellt eine silberne Taschensonnenuhr, im Besitz des Hrn. *Dr. P. Gruner - Bern*, dar. Es findet sich der übliche Compass mit den 4 Hauptrichtungen und der Deklinationsabweichung, dazu der Stundenring mit Einteilung von 2 . 3 . . . 12 1 2 . . . . 9 nebst Zeiger. Der Stundenring aber kann durch einen kleinen zweiten Zeiger, der sich über einer kreisförmigen Einteilung bewegt, auf alle Polhöhen von 35 °—65 ° gestellt werden, sodass die richtige Stellung des Stundenrings auf die bequemste Art und Weise hervorgebracht werden kann. Auf der Rückseite sind die folgenden Polhöhen:

Lisobona 39, Madrit 40, Barcelona, Caragoca (Saragone), Napoli 41, Rom 42, Genua, Turin 44, Lion, Meyland, Venetig 45, Zürich, Bern 46, Insprug, Gräz 47, Paris, Wien, Strasburg, München 48, Regespurg, Nanci, Philipsburg, Nürnberg 49, Franckfurt am Main 50, Prag, Warsau, Trier, Rüssel *), Antwerpen, Gent, Leipzig, Dresden, Laick **), Berlin 51, London, Amsterdam 52, Hamburg, Danzig 54, Coppenhage 56, Stockholm 60, Augsburg 48. Der Verfertiger ist *Johann Willebrand* in Augsburg.

*7)* Ein *siebentes Stück* ist in meinen Besitz durch Kauf gelangt. Es

*) wird wohl «Brüssel» nicht «Ryssel» heissen sollen.

**) mir unverständlich.

ist eine überaus einfache, hölzerne Taschensonnenuhr mit Vertical- und Horizontaluhr nebst Compass für die Polhöhen 40°—55° berechnet, wo der Index einfach durch eine Schnur dargestellt wird. Viel feiner ist ein ebenfalls in meinen Besitz gelangtes

8) *Achtes Stück* aus Elfenbein mit wunderhübscher Gravur. Dasselbe zeigt auf der obern Seite eine Windrose in 32 Teile geteilt, mit beweglichem Zeiger. Auf der Innenseite des Deckels findet sich 1) eine merid. Vertical-Uhr, wo die Einteilungslinien Hyperbeln sind; 2) die Scala der Polhöhen, für welche die Uhr gebraucht werden kann, hier vom 42—54° variiert. Ferner ist vorhanden eine Ansicht einer Stadt und 3) endlich folgende Tabelle von Orten und Polhöhen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| wormbs | 54 | neystadt | 48 |
| manitz | 54 | krembs | 48 |
| trier | 54 | mailand | 45 |
| ege | 54 | venetia | 45 |
| andorf (Antwerpen) | 51 | lion | 45 |
| loven | 51 | genua | 45 |
| brüsel | 51 | ragusa | 42 |
| gandt | 51 | nicaea | 42 |
| wien | 48 | roma | 42 |
| lintz | 48 | pisa | 42 |

Auf der Hauptplatte sind 2 Uhren nebst Compass und als Verfertiger angegeben: *Joseph ducher.*

Auf der untern Seite der Hauptplatte sind angegeben:

1) epagta gregori,
2) epagta juliana.

Die Uhr scheint mir niederländischen Ursprungs zu sein.

II.

*Ein ganz anderes System ist nun durch eine kleine silberne* Sonnenuhr repräsentiert, welche auch von Frl. *L. v. Fischer* dem historischen Museum geschenkt worden ist. Es figuriert vorerst ein Compass mit einfacher Windrose ganz wie bei den frühern Systemen. Die bewegliche Nadel muss auf den Zeiger der Windrose gestellt werden. Auf der ebenen Oberfläche des Instruments treffen wir zwei Einteilungen:

| Pour | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 55 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 55 |
| 50 | IV | V | VI | VII | VIII | IX | X | XI | XII | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | 50 |
| 45 | | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | | 45 |
| 40 | | V | VI | VII | VIII | IX | X | XI | XII | I | II | III | IV | V | VI | VII | | 40 |

Die vierfache Scala ist also für die 3 Hauptpolhöhen 40, 45, 50, 55 aufgestellt. Dazu gehört ein umlegbarer Zeiger mit Spitz und den obigen Polhöhen entsprechender Einteilung vom 40—60°. Auf der Rückseite steht der Name des Verfertigers. N. Bion, A. Paris, ca. 1700 daselbst lebend, ein berühmter Instrumentenmacher. Ausserdem finden sich folgende Polhöhen angegeben:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Constantinopel | 41 | Londres | 52 |
| Manilla | 43 | Varsovie | 52 |
| St. Malo | 48 | Toulouse | 42 |
| Bordeaux | 45 | Rome | 42 |
| Stockholm | 59 | Lion | 46 |
| Dantzig | 54 | Milan | 46 |
| Venise | 45 | Naples | 41 |
| Paris | 48 | Hamburg | 54 |
| Brest | 48 | Madrid | 41 |
| Geneve | 46 | Moskau | 56 |
| Vichue | 49 | Dijon | 47 |
| La Rochelle | 46 | Thurin | 44 |
| Barcelona | 41 | | |

*Ein zweites Exemplar mit etwas genauer* eingeteilter Windrose wurde von *Hrn. Reg.-Rat F. v. Wattenwyl* dem historischen Museum geschenkt. Der Verfertiger ist *N. Butterfield*, Paris. Die ganze Einteilung auf der Platte ist gleich wie beim vorigen Exemplar, nur steht pour | de und beziehen sich die Scalen statt auf:

40 40
45 46
50 49
55 Grad auf 52.

Den 4 Scalen sind nun die betreffenden Orte zugeteilt. Von der Mitte nach dem Rand hat man also den

1. Cadran.
2. »
3. »
4. »

| | | | |
|---|---|---|---|
| I. Cadran: | London | 51° | 32′ |
| | Bruxelles | 50 | 51 |
| | Monse | 50 | 31 |
| | Liège | 50 | 36 |
| | Lille | 50 | 40 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | Calais | 50 | 37 |
| | Dunquerque | 51 | 2 |
| II. Cadran: | Paris | 48° | 51′ |
| | Brest | 48 | 23 |
| | Metz | 49 | 14 |
| | St. Malo | 48 | 38 |
| | Nancy | 48 | 42 |
| | Strasbourg | 48 | 30 |
| III. Cadran: | Lyon | 45° | 45′ |
| | Grenoble | 45 | 11′ |
| | La Rochelle | 46 | 10′ |
| | Bordeaux | 44 | 50 |
| | Dijon | 47 | 18 |
| | Berne | 46 | 47 |
| | Genève | 46 | 12 |
| | Portiers | 46 | 34 |
| IV. Cadran: | Marseille | 43° | 10′ |
| | Bayonne | 43 | 30 |
| | Perpignan | 42 | 44 |
| | Pampeloine | 42 | 48 |
| | Toulouse | 43 | 22 |
| | Rome | 41 | 54 |
| | Gênes | 44 | 25 |
| | Pan | 43 | 12 |

III.

*Eine dritte Gruppe* von Sonnenuhren bilden die *Kugel-Sonnenuhren*. Es sind dies irdene Kugeln, die in einem Durchmesser durchbohrt sind, so dass man sie auf einen Stab aufstecken konnte, den man in den Garten stellte. Wir unterscheiden auf der Kugel 2 Hauptkreise:

1) einen breiten Kreis, welcher durch die Ekliptikpolaxe geht, dessen Ebene mit der durch den Stab markierten Linie einen Winkel von ca. 23° bildet;
2) senkrecht dazu ist ein breites Band, welches die Stundenmarkierung enthält und wo bei der einen Kugel jede Stunde noch in halbe, bei der andern Kugel sich in Viertel einteilt.

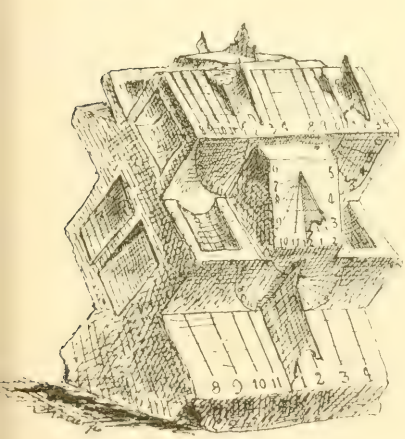
Dazu gehört nun ein bewegliches, mondsichelförmiges Blech, welches mit seinen Enden an der Ekliptikaxe befestigt und um dieselbe drehbar ist.

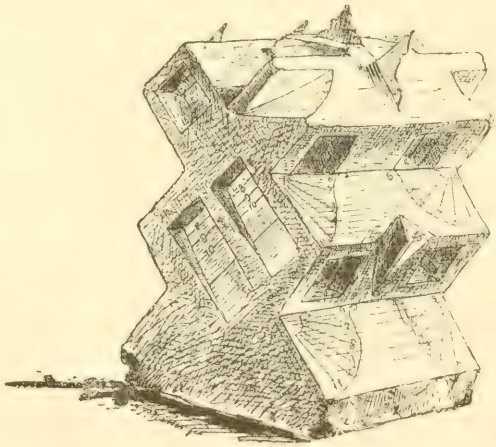
Beim Gebrauch ist dieses Blech auf die Marke 12 Uhr gestellt worden und hat dann einen Schatten geworfen, der zuerst die Vormittagsstunden, hernach diejenigen des Nachmittags markiert hat.

Solche Sonnenuhren scheinen noch im Anfang dieses Jahrhunderts im Gebrauch gewesen zu sein. Auf der einen findet sich das Datum 12. Jan. 1802, die zweite ist von einem *J. Jost* in Langnau dem historischen Museum geschenkt worden. Es ist möglich, dass auf abgelegenen Bauernhöfen sich noch ähnliche Instrumente vorfinden und dort im Gebrauch sind, darauf möchten wir aufmerksam gemacht haben.

IV.

Die folgende Gruppe besteht aus einer ganzen Sonnenuhrenkolonie. Ein Sandsteinklotz wurde dazu eingerichtet. Auf der Vorderseite finden sich 8, auf der Hinterseite 7, zu beiden Seiten 3 ver-





schiedene Sonnenuhren, die als gegenseitige Kontrolle dienen konnten, es sind horizontale und vertikale Sonnenuhren. Diese Sonnenuhr wurde von Hrn. *Dr. E. v. Fellenberg* und Hrn. *Custos v. Jenner* auf dem Estrich des ehemaligen Klosters zu Frienisberg entdeckt und Hrn. v. Jenner hatte dieselbe längere Zeit im Hof der Stadtbibliothek aufgestellt, um durch fortgesetzte Beobachtung einzelne im Laufe der Zeit verwischte Skalen wieder herzustellen, was ihm auch ganz vorzüglich gelungen ist. Obige Zeichnung verdanke ich der Güte des Hrn. caud. jur. Kasser in Bern.

J. H. Graf.

# Notizen zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in der Schweiz.

Nr. 51. Herr Professor Dr. *Ludwig Fischer* trat auf Ende des Sommersemesters 1897 von der ordentlichen Professur der Botanik und der Direktion des botanischen Gartens in Bern zurück. Die h. Regierung ernannte ihn auf einstimmigen Vorschlag der phil. Fakultät der Hochschule zum Prof. honor., indem sie einesteils dadurch den verdienten Gelehrten ehren, ihn andernteils noch dem Lehrkörper der Hochschule erhalten wollte. Sein Nachfolger wurde sein Sohn, Herr Dr. *E. Fischer*. Ludwig Fischer blickt auf eine lange und ehrenvolle Laufbahn als Universitätslehrer zurück. Privatdozent für Botanik an der Hochschule im Jahre 1853 wurde er 1863 ausserordentlicher, 1863 ordentlicher Professor. Der Verfasser der «Flora von Bern» und vieler Aufsätze trat 1852 in die Bernische Naturforschende Gesellschaft, funktionierte 1853 bis 1859 als Sekretär und Kassier, wurde von 1861 an mehrmals an die Spitze der Gesellschaft berufen und wird auch einer der zwei Ehrenpräsidenten der Jahresversammlung der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft sein, welche am 1., 2., 3. August in Bern tagen wird. Am 31. Januar 1898 feierte L. Eischer im Kreise seiner Familie seinen 70. Geburtstag. Herr Fischer hat sich sowohl bei seinem Rücktritt vom Ordinariat, wie auch zu diesem Tage jede Veranstaltung dringend verbeten. Allein, wie die Studentenschaft den greisen Gelehrten nicht ohne Ehrung scheiden lassen wollte und seine Verdienste durch einen solennen Fackelzug würdigte, so liess es sich die philosophische Fakultät, der der bescheidene Gelehrte seit 45 Jahren angehört, nicht nehmen, Fischers Geburtstag zu feiern. Eine Abordnung der Fakultät überreichte Herrn Fischer eine kalligraphisch ausgeführte Adresse mit folgendem Wortlaut:

Die philosophische Fakultät der Hochschule Bern

an

Herrn Professor Dr. Ludwig Fischer in Bern.

Hochgeehrter Herr Kollege!

Sie begehen heute Ihren 70. Geburtstag. Die philosophische Fakultät der Hochschule Bern, welche seit 1853 das Glück hatte, Sie zu den ihrigen zählen zu dürfen, wollte diesen feierlichen Anlass nicht

vorbeigehen lassen, ohne Ihnen die herzlichsten Glückwünsche zur Feier dieses Tages darzubringen. Nicht jedem Sterblichen ist es vergönnt einen solchen Tag zu erleben, doppelt glücklich ist aber ein Mann, der nach einem so arbeitsamen und der Wissenschaft geweihten Leben noch in so frischer Geistesverfassung denselben im Schosse der lieben Seinen geniessen kann. Dankbar erinnert sich die Fakultät daran, welche enormen Verdienste Sie um die Entwicklung Ihrer speciellen Wissenschaft an unserer Hochschule haben. Sie verstanden es, allseitig anregend zu wirken und mit den wenigen zu Gebote stehenden Mitteln Vieles zu leisten.

Wir verbinden mit diesem Dank den herzlichen Wunsch, Sie möchten uns, hochgeehrter Herr Kollege, noch recht lange erhalten bleiben und uns Ihre so geschätzte Mitwirkung nicht entziehen.

Mit vollkommener Hochachtung

Namens der philosophischen Fakultät der Hochschule

Der Sekretär: J. H. Graf. Der Dekan: F. Vetter.

Nr. 52. Ueber Ingenieur *Robert Lauterburg* haben wir folgende Daten erhalten:

R. Lauterburg ist am 14. Juni 1816 im Pfarrhaus Trubschachen geboren. Sein Vater Gottlieb Samuel war dort seit 1814 Helfer, wurde 1820 Pfarrer in Walperswyl, 1833 Pfarrer in Oberwyl, wo er 1855 starb. Nach Absolvierung seiner Studien wurde Robert Lauterburg vom Staat mit der Ausführung verschiedener Pläne beauftragt, z. B. mit denjenigen zur Brünigstrasse und der Verbauung von schwierigen Bergbächen. 1847 wurde er Bezirksingenieur in Thun, 1851 Chef der technischen Bureaus in Bern. Von 1856–59 leitete er den schönen Strassenbau von Biel nach Reuchenette. Er baute mit *F. Thormann* die Brücke der Verbindungsbahn in Basel. Ins Privatleben zurückgekehrt, widmete er sich dem Studium der Hydrometrie. Hier war er Autorität, und die Bedeutung der Wasserkräfte für unser Land konnte er nicht genug hervorheben. Er starb am 23. August 1893 in Bern.

*Nr. 53.* Ich habe in der Biographie von *Ludwig Schläfli* (Mitteilungen 1896, S. 127, separat S. 10) an einer Stelle angedeutet, dass feine Damen Roms über den ungelenken jungen Mann die Achseln gezuckt hätten. Es sollte sogar ein gedruckter Passus vorhanden sein. Genauere Erkundigungen ergaben, dass die bezügliche Stelle sich in einem Brief von *Rebecca* an *Fanny Hensel* d. d. 21. Oktober 1843 in Die Familie Mendelsohn 1729—1847, von *S. Hensel*, III. Bd. befindet. Auf Schläflis Reklamation hin ist die Stelle in der 2. Ausgabe weggeblieben.

*Nr. 54.* Am 4. Februar 1898 starb in Genf *Henry Bouthilier de Beaumont*, Ehrenpräsident und Gründer der „Société de Géographie de Genève“, Commandeur vom Orden Leopold, officier de l'instruction publique, ein verdienter Geograph, 79 Jahre alt.

*Nr. 55.* Am 15. Mai 1898 feierte die Geographische Gesellschaft von Bern das 25jährige Jubiläum ihrer Gründung. In der Festsitzung, welche Nachmittags 3 Uhr im Museumssaal stattfand, sprachen der derzeitige Präsident Herr R.-R. Dr. *Gobat*, *Elie Ducommun* und Herr Dr. *F. Sarasin* aus Basel, der berühmte Celebes-Reisende. Abends fand ein Festbankett statt. Die Festschrift „Die Geographische Gesellschaft von Bern 1873—1898. — Ein Rückblick gelegentlich der Feier des

25jährigen Bestehens der Gesellschaft", 57 S. wurde von Professor Dr. *Graf* verfasst. Herr E. Ducommun veröffentlichte gleichzeitig einen Nekrolog über den Gründer der Gesellschaft Herrn Professor Dr. *Schaffter*, gestorben 1897.

*Nr. 56.* Wir bringen nun eine Reihe von Briefen des Physikers und Geodäten *Micheli du Crest* zum Abdruck. Diese Briefe befinden sich auf der Berner Stadtbibliothek.

*Nr. 1.* Ein Brief von Micheli an Herrn Bavière (Bavier), seinen Korrespondenten in Basel:

A Monsieur Bavière l'aîné Marchand Epicier à Basle.

Au Château d'Arbourg le 24 Novembre 1753.

Monsieur,

J'ay reçu la lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire le 19 de ce mois et la nouvelle traduction des dissertations du Docteur Martine sur la chaleur et les thermomètres que vous avez eu la bonté de joindre avec et sur lesquelles vous me demandez mon sentiment, c'est pourquoi j'avois l'honneur de vous dire:

Que j'avois deja eu entre mes mains à Paris en 1741 le livre dont il sagit, en Anglais et que M. le Docteur en médecine m'avait preté. Qu'il m'en avoit expliqué lui-même quantité d'endroits, et que j'en avois fait traduire d'autres par un de mes amis, dont j'ai la version et quantité de remarques que j'ai faites dessus, dans mes papiers de Berne ou d'ailleurs, ainsy j'etois deja au fait de toutes les questions qui traite lorsque je l'ai vêtu et ce seroit un tres grand ouvrage que d'entreprendre par moi de vous dire tout ce que je pense sur la matière parce qu'il faudroit que je fisse quantité d'expériences et principalement celles sur les thermomètres à air que j'avois entrepris à Bâle, afin de m'assurer dans mes sentiments, or je ne suis pas ici en lieu pour cela. Je considère en general cet ouvrage comme une ébauche d'ou fort grand travail à poursuivre qu'il renferme quantité d'observations judicieuses et quantité d'autres fort erronnées, dont je vais vous donner ici des exemples.

1° il se trompe tres fort à pag. 34 lorsquil dit à l'égard de l'esprit de vin 1° qu'il ne peut pas soutenir le degré de chaleur de l'eau bouillante et 2° qu'il gèle dans les très grands froids, car à l'egard du 1° j'ai fait plus de 100 thermometres qui prouvent le contraire et il y en a à Bale un grand nombre et quant au 2° l'exemple qu'il cite du thermometre qui gela à Torneä par le 43 degre et ½ de froid du mien, n'est nullement concluant puisque cet instrument etoit de la fabrique de l'Abbe *Nollet*[1]) qui en le plongeant dans son esprit de vin melé d'un quart peut l'avoir rempli d'un esprit de vin moitié eau, si la bouteille de l'esprit de vin étoit reposée de longue main et qu'en remplissant le thermometre il en ait plongé le col jusquau fond, car l'esprit de vin ne gela du tout point car M. de *Camus*[2]) qui l'observa lui même que la ainsy assuré étant en conversation avec lui chez M. *Geoffroy*[3]) et l'on peut encore s'en informer de lui.

[1]) *Nollet*, J. A., geb. 19. XI. 1700 zu Tusipré, † 24. IV. 1770 in Paris, Professor der Physik in Turin u. Paris.

[2]) *Camus*, Ch. S. L. geb. 25. VIII. 1699 zu Cressy, † 2. II. 1768 zu Paris, Mitgl. der Gradmessung, Professor.

[3]) *Geoffroy*, Ch. J. geb. 8. VIII. 1685 Paris, † 9. III. 1752 Paris, Apotheker, Mitgl. der Akademie.

Je suis persuadé que l'esprit de vin qui emporte la poudre et dont la dilatation est de 909 degrez au temperé et de 100 g de l'eau bouillante est capable de soutenir 100 degrez de froid sans geler je le crois meme plus propre et infiniment plus commode parce qu'on le discerne alors facilement à travers une vitre au lieu qu'il est alors presque impossible de discerner le mercure et si vous ouvrez la vitre vous troublez toute l'observation. Ajoutez encore à cet avantage celui de pouvoir transporter le thermometre d'esprit de vin sans se casser au lieu que ceux de mercure y sont tres sujets. Mais pour ce qui est des degrez de chaleur superieurs à l'eau bouillante je conviens que les thermometres de mercure valent mieux et ainsy pour de certaines observations tres promtes où l'on ne peut avoir qu'une ou deux pour donner au thermometre son equilibre et pour l'observer car on ne peut faire pour cet effet des thermometres avec du mercure qui seront plus propres que ceux d'esprit de vin, vue qu'à boules égales le mercure est le plus promt. Le docteur erre encore grandement pag. 20 et 21 de même que son traducteur et commentateur (qui est M. *le Monnier*[1]) incognito) lorsqu'ils affirment si fort la fixité du point de congelation, puisque dans ma reponse à l'abbé *Nollet*, j'ai offert de gager contre quiconque voudroit que je pousserois de l'eau sans geler jusqu'à 14 degres de froid de mon thermometre et que j'en ferois geler entre ces deux termes à quel degré l'on voudroit. M. le Professeur *Jalabert*[2]) me repondit la dessus quil croiroit que je perdais à 14, mais non pas à 13 et demi puisqu'il avoit poussé de l'eau sans geler jusques là et il l'a sans doute mandé à M. l'abbé *Nollet,* ce qui renverse tout le vieux sisteme sur la nature du froid, car s'il n'y avoit que le depart de la matiere ignée de l'eau jusques à un certain point qui fit geler l'eau, l'eau geleroit toujours au meme degré, comme le plomb fondu et la fonte de la cire vierge cessent toujours d'etre liquides au meme degré, mais l'experience que j'ai avancée et que j'ai faite à Bale en presence de M. *Bernoully* et dautres pour former de la glace prouve le contraire. Je l'ai faite aussi à Paris en presence de grand nombre de gens.

Je conviens cependant que le terme de la glace pilée n'est pas susceptible de beaucoup d'erreur et que celui de la neige fondante et qu'on tient quelque tems dans une chambre tempérée, n'en est presque pas susceptible parceque la boule du thermometre que vous y placez se trouvant plus chaude fait fondre la neige autour d'elle et procure ainsy un terme equivalent à celui de l'eau dans la glace (que jai decouvert le premier à Paris en 1742 apres bien des peines inutiles pour trouver le terme de froid qui opere la congelation), mais il faut à cet egard savoir prendre les précautions, car si la neige est bien froide dans son centre quoique les extremités en soient fondantes et que vous remuiez le thermometre de sa place et le mettiez dans une autre, vous serez exposé à le voir descendre plus bas, *Ergo* ce terme de l'eau dans la glace à l'abry de la reverberation est ce qu'il y a de plus sur, mais on ne le connoissoit pas du vivant du Docteur *Martine*[3]).

---

[1]) *Le Monnier*, P. Ch. geb. 23. XI. 1715 Paris, † 2. IV. 1799 Paris, Mitgl. der Gradmessung, Professor der Physik.

[2]) *Jallabert*, Louis, geb. 26. VII. 1712 in Genf, Prof. der Physik und Mathematik daselbst, † 11. III. 1768 in Genf.

[3]) *Martin*, Benjamin, geb. 1704 in Worplesdon, † 9. II. 1782 in London, Mechanicus und Optikus.

Le Docteur parle à page 45 des experiences qu'a faites M. *Campbell* pour trouver le terme de la glace qui commence à se fondre au Thermometre de *M. de L'isle* [1]), jen ai fait une magnifique d'un thermometre contenant 10 mille grains de mercure juste (je l'ai donné à mon départ de Paris a M. *le Monnier)* j'en parle dans mon imprimé de 1741 sur le therm^re universel, je lai refait depuis lors et il a été conforme à sa precedente experience, il portoit mon terme du temperé à 137 et ½ mais trois autres de moindre boule, dont l'un est au cabinet de Mr. *Pajot d'Onsembray*, l'autre à l'academie des beaux arts a Lion, et le 3^e a votre bibliotheque, ont marqué pour ce terme le 1^er 135, le second 134 et le 3^e si je m'en souviens bien 133½ or ils etoient tous quatre de differentes sortes de verre et de verrerie et leurs differences se trouvaient à peu près en raison des surfaces des boules par raport à leur contenance et non point en raison de la difference des verres. C'est pourquoi j'estime que la forme spherique des boules est la plus parfaite, puisquelle est la moindre en surface exterieure et par consequent qu'elle essuie dans l'eau bouillante la moindre dilatation quoiqu'elle en essuie cependant tel que celui de notre bibliotheque près de trois ou quatre degres, dans le tems qu'on ne sauroit à celui d'esprit de vin s'en apercevoir; (pour faire cette experience il faut plonger la boule au temperé brusquement dans de l'eau bouillante) et cela fait encore une objection fort considerable contre les therm^es de mercure, car on marque en quelque facon à faux sur ces therm^es le terme de l'eau bouillante puisqu'il devroit etre a ceux de Fahrenheit quelquefois 10 et meme vingt degres plus haut quoique cette erreur ne soit pas sensible entre le terme 32 de la neige fondante, et le terme de l'eau bouillante de ce thermond; neantmoins elle devient tres sensible dans les plus grands froids que l'on puisse eprouver puisque si l'on en eprouve des pareils a ceux de Semiskoy ou de Kyringa, l'erreur peut sy trouver alors de 10 ou 20 degres et par consequent il se rencontre une tres grande difference entre deux therm^es de Fahrenheit dont l'un sera à grosse boule, et l'autre à petite boule, et sur tout si au lieu de petite boule il y a un cilindre fort long, car alors la dilatation de ce verre de l'eau bouillante est tres grande par raport à la quantité de mercure qu'il contient. Or aux therm^es d'esprit de vin, cette erreur est si peu de chose qu'il ne vaut pas la peine d'en parler, car la boule dun therm^e d'esprit de vin est à cet egard toujours 8 fois moins spacieuse dans sa surface relative, que non pas celle du thermometre de mercure, supposant des boules dans l'un et dans l'autre et si l'on suppose un cilindre au mercure 16 et 20 fois moins dans lesprit de vin.

(Schluss folgt im nächsten Bande.)

---

[1]) *De L'isle*, Joseph Nicolas, geb. 4. IV. 1688 in Paris, Mitglied der Akademie in Paris und Petersburg, † 11. IX. 1768 in Paris.

# Inhalts-Verzeichnis.


| | Seite der Sitzungsberichte | Seite der Abhandlungen |
|---|---|---|
| *Baltzer A.*, Prof. Dr., | | |
| Fossile Mammutleichen aus dem Eise Neu-Sibiriens | XIV | |
| Lieferung XXX der Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz | XIV | |
| Ein neues Barytvorkommen aus dem Oberland | XIV | |
| Notiz über ein Mineralvorkommen im Berneroberland | | 1 |
| *Brückner E.*, Prof. Dr., | | |
| Gute und schlechte Weinjahre in ihren Beziehungen zu den Klimaschwankungen | XIV | |
| Die Verbreitung des Eisbodens in Sibirien | XIV | |
| *Crelier L.*, Dr. phil., professeur, | | |
| Sur la fonction Bessélienne de II espèce $S^{n}(x)$ | | 61 |
| *Drechsel Edm.* Prof. Dr., | | |
| Die Aufgaben der physiologischen Chemie | XIII | |
| *v. Freudenreich E.*, Dr. phil., | | |
| Die Erreger der Käsereifung | X | |
| *Girtanner, A.*, Dr., | | |
| Ueber ein Steinbockgehörn aus dem Pfahlbau von Greng im Murtensee | | 47 |
| *Graf J. H.*, Prof. Dr., | | |
| Bericht über die Exhumierung Steiners | VIII | |
| Vorweisung von Reproduktionen alter Karten | XIV | |
| Die Exhumierung Jakob Steiners und die Einweihung des Grabdenkmals Ludwig Schlaeflis anlässlich der Feier des 100. Geburtstages Steiners am 18. März 1896. (Mit 3 Beilagen) | | 8 |
| Verzeichnis der gedruckten mathematischen, astronomischen und physikalischen Doktor-Dissertationen der schweizerischen Hochschulen bis zum Jahre 1896 | | 53 |
| Einiges über Sonnenuhren | | 106 |
| Notizen zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in der Schweiz | | 114 |
| *Gruner P.*, Dr. phil. und Docent, | | |
| Die neuern Ansichten über Materie und Energie | VIII | 25 |
| Energetische Anschauungen | | 97 |
| *Hug O.*, Dr. phil., | | |
| Der Isteiner-Klotz bei Basel | XIV | |
| *Kaufmann R.*, Dr. phil. und Gymnasiallehrer, | | |
| Demonstration von Spinnennestern aus Korsika und Lärchennadelballen aus dem Silser See | XIV | |

| | Seite der Sitzungsberichte | Seite der Abhandlungen |
|---|---|---|
| *Kissling E.*, Dr. phil. Docent und Sekundarlehrer, | | |
| Neue Funde von diluvialen Arctomysresten aus der Umgegend von Bern . . . . . | IX | 3 |
| Der Quellenerguss der städtischen Wasserversorgung in den letzten 30 Jahren . . . . . | XIV | |
| *Köpsel*, Dr. | | |
| Das Elektricitätswerk in Wynau . . . . . | XIII | |
| *Kronecker H.*, Prof. Dr., | | |
| Atembewegungen . . . . . | VII | |
| *Schönenberger F.*, Adjunkt des eidg. Oberforstinspektors, | | |
| Die Baumriesen der Schweiz . . . . . | IX | |
| *Studer-Steinhäuslin B.*, Apotheker, | | |
| Bericht über die Pilzsaison 1896. | VIII | |
| *Studer Th.*, Prof. Dr., | | |
| Diluviale Knochen vom Salève . . . . | VIII | |
| Steinbockgehörn aus den Pfahlbauten . . . | VIII | |
| Die Fortpflanzungsgeschichte der Aale . . . | XIV | |
| *Tschirch A.*, Prof. Dr., | | |
| Die Entwicklung der chemischen Industrie der Schweiz. | VII | |
| Neues Konservierungsverfahren für Hymenomyceten | VII | |
| Vorweisung pflanzenphysiologischer Tafeln . . | VIII | |
| Vorweisung des anatomischen Atlas der Pharmakognosie und Nahrungsmittelkunde . . . | VIII | |
| Drei botanische Gärten in den Tropen . . . | XIII | |
| Gedächtnisrede auf den verstorbenen Präsidenten der Gesellschaft, Herrn Dr. Ed. Drechsel . . | XIV | |
| *Zeller J. R.*, Dr. phil. und Gymnasiallehrer, | | |
| Naturwissenschaftliche Streifereien in Aegypten . | VI | |
| *Verzeichnis der Mitglieder* . . . . . | XV | |
| *Auszug aus der Jahresrechnung* pro 1896 . . . | XX | |
| *Jahresbericht* über die Thätigkeit der bernischen naturforschenden Gesellschaft vom 2. Mai 1896 bis 1. Mai 1897. | III | |

## Verlag von K. J. WYSS in Bern.

(Fortsetzung von Seite 2 des Umschlags.)

**Fascikel IV 6:** *Fauna helvetica.* Heft 6: Mollusken. Zusammengestellt von Prof. Dr. Th. Studer, Dr. G. Amstein und Dr. A. Brot. Preis 60 Cts.

**Fascikel V 4:** *Heraldik und Genealogie.* Bearbeitet von Jean Grellet und Maurice Tripet. Bern 1895. 68 Seiten 8°. Preis Fr. 1.50

**Fascikel V 6 a–c:** *Architektur, Plastik, Malerei.* Zusammengestellt von Dr. B. Haendcke. Bern 1892. 100 Seiten 8°. Preis Fr. 2. —

**Fascikel V 9 ab:** *Landwirthschaft.* Zusammengestellt v. Prof. F. Anderegg u. Dr. E. Anderegg. Bern 1893. Heft 1—3. 258 S. 8° à Fr. 3. —
id. „ 4 „ —.60
id. „ 5 und 6 à „ 2. —

**Fascikel V 9 c:** *Forstwesen, Jagd und Fischerei.* II. Forstwesen. Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. Bern 1894. 160 Seiten 8°. Preis Fr. 2. —

**Fascikel V 9 c:** *Forstwesen, Jagd und Fischerei.* Fischerei. Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. Bern 1898, 65 Seiten 8°. Preis Fr. 1.50

**Fascikel V 9 d:** *Schutzbauten.* Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. Bern 1895. 136 Seiten 8°. Preis Fr. 2. —

**Fascikel V 9 g β:** *Mass und Gewicht.* Bearbeitet von F. Ris, Direktor der eidgen. Eichstätte. Bern 1894. 36 Seiten 8°. Preis Fr. 1. —

**Fascikel V 9 g γ:** *Post- und Telegraphenwesen.*
*Postwesen.* Zusammengestellt von der Schweizer. Oberpost-Direktion.
*Telegraphenwesen.* Zusammengestellt von E. Abrezol, Inspektor der Central-Telegraphenverwaltung. Bern 1895. 113 Seiten 8°. Preis Fr. 2. —

**Fascikel V 9 g ε:** *Bankwesen, Handelsstatistik, Versicherungswesen.* Zusammengestellt von W. Speiser, Basel, Dr. Geering und Dr. J. J. Kummer. Bern 1893. 207 Seiten 8°. Preis Fr. 3. —

**Fascikel V 9 j:** *Alkohol und Alkoholismus.* Zusammengestellt von Otto Lauterburg, Pfarrer in Neuenegg, E. W. Milliet, Direktor der eidgen. Alkoholverwaltung, und Antony Rochat, Pfarrer in Satigny. Bern 1895. 183 Seiten 8°. Preis Fr. 2. —

**Fascikel V 10 e γ:** *Die christkatholische Litteratur der Schweiz.* Zusammengestellt v. Dr. F. Lauchert. Bern 1893. 32 Seiten 8°. 60 Cts.

**Fascikel V 10 e α:** *Bibliographie der evangelisch-reformirten Kirche in der Schweiz.* Heft 1: Die deutschen Kantone. Zusammengestellt von Dr. G. Finsler. Preis Fr. 2. —

**Fascikel V 10 e:** *Die katholisch-theologische und kirchliche Litteratur des Bisthums Basel* vom Jahre 1750 bis zum Jahre 1893. Zusammengestellt von Pfr. Ludwig R. Schmidlin in Biberist.
Heft 1 und 2 à Fr. 3. —

**Durch jede Buchhandlung zu beziehen.**

## Verlag von K. J. WYSS in Bern.

**Graf, J. H., Prof., Dr.** *Einleitung in die Theorie der Gammafunktion und der Euler'schen Integrale* . Fr. 2. —

— — *Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in bernischen Landen* vom Wiederaufblühen der Wissenschaften bis in die neuere Zeit. Heft 1—3. Fr. 7. 20

— — *Leben und Wirken des Physikers und Geodäten Jacques Barthélmy Micheli du Crest* aus Genf, Staatsgefangener des alten Bern 1746 — 1766. Mit Portrait Micheli's, einer Ansicht seines Gefängnisses in Aarburg und Facsimile seines Panorama der Alpen Fr. 3. —

— — *Das Leben und Wirken des Physikers und Astronomen Joh. Jac. Huber* aus Basel, 1733—1798. Mit dem Bildnisse Huber's und einer Tafel, seine freie Uhrhemmung darstellend . . . . . Fr. 1. —

— — *Professor Dr. Rudolf Wolf, 1816—1893* » 1. —

— — *Professor Ludwig Schläfli, 1814—1895* . » 1. 20

— — *Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli* . . . . . Fr. 3. —

— — *Die Exhumirung Jakob Steiner's* und Einweihung des Grabdenkmals Ludwig Schläfli's anlässlich des 100. Geburtstages Steiner's. Mit 2 Lichtdrucken Fr. 1. —

— — *Der Mathematiker Jakob Steiner von Utzenstorf.* Ein Lebensbild und zugleich eine Würdigung seiner Leistungen . . . . . Fr. 1. 50

**Graf, J. H., Prof. Dr.** und **Gubler, Ed., Dr.** *Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Funktionen.* I. Heft: Die Bessel'sche Funktion erster Art. Fr. 4. —

**Huber, G., Prof., Dr.** *Sternschnuppen, Feuerkugeln, Meteorite und Meteorschwärme* . . . . . Fr. 1. —

— — *Forschungen auf dem Gebiete der Spektralanalyse* —. 80

— — *Die kleinen Planeten des Asteroidenringes* —. 60

**Kissling, Dr., E.** *Die versteinerten Thier- und Pflanzenreste in der Umgebung von Bern.* Excursions-Büchlein für Studirende . . . . . Fr. 4. —

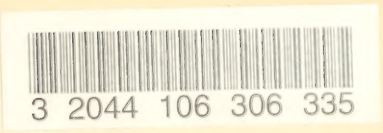
**Baumberger, E.** *Ueber die geologischen Verhältnisse am linken Ufer des Bielersees* . . . . . Fr. 2. —

**Baltzer, A., Prof.** *Vom Rande der Wüste.* Populärer Vortrag, gehalten im November 1894 in der Bern. Naturforsch. Gesellschaft. Mit drei Lichtdrucktafeln. Fr. 1. 50

**Fischer, Prof. L.,** *Zweiter Nachtrag z. Verzeichniss der Gefässpflanzen des Berner-Oberlandes, mit Berücksichtigung der Standortsverhältnisse, der horizontalen und vertikalen Verbreitung* . . . . . Fr. —. 25

---

**Durch jede Buchhandlung zu beziehen.**


3 2044 106 306 335